6 Die Pseudoinverse

Viele Betrachtungen linearer Abbildungen führen auf Matrizenoperationen, in denen auch die Inversen einiger Matrizen benötigt werden. Inverse Matrizen lassen sich aber nur für quadratische Matrizen bilden, deren Determinanten ungleich Null sind. Die Gleichungssysteme müssen eindeutig sein.

Werden aber wiederholte Messungen zu technischen Zusammenhängen durchgeführt, statische Systeme betrachtet, oder andere Untersuchungen durchgeführt, in denen mehr Gleichungen, als gesuchte Größen vorkommen, führen die Inversenbildungen auf leere Lösungen.

Ebenso können Gleichungssysteme auftreten, in denen weniger Gleichungen, als gesuchte Größen aufstellbar sind – sich also Lösungsfunktionen ergeben. Als Beispiel sei hier die Verbrennung eines Stoffes in Luft genannt, in der neben den erwünschten (stöchiometrischen) Reaktionen auch noch weitere Reaktionen ablaufen...

Um die Problematik, der nicht eindeutig oder nicht widerspruchsfrei beschriebenen Systeme, zu handtieren, lässt sich mit Hilfe des Verfahrens von MOORE-PENROSE eine *Pseudoinverse* bilden. Dieses Vorgehen werde nachfolgend beschrieben:

Es seien *V;W* Vektorräume über einem Körper *K, f* eine Abbildung von *V* auf *W* mittels der Matrix *M, b* ein Element in *V* und x eine gesuchte Größe in *W*, also:

$$M = M_B(f) \in K^{n \times m}$$

Sei $Mx = b$

das zugehörige Gleichungssystem mit der gesuchten Größe *x*. Dann lässt sich zunächst eine quadratische Matix *Q* bilden, gemäß

$$Q = M^T M$$

Die Matrix wird sodann invertiert. Aus

$$Q = M^T M$$

$$E = Q^{-1} M^T M$$

ergibt sich die Pseudoinverse Matrix M^+ (die *MOORE-PENROSE-Inverse*)

$$M^+ = Q^{-1} M^T.$$

Daraus folgt unmittelbar die Lösung des Gleichungssystems

$$x = M^{+}\, b$$

Alternativ, für nicht eindeutig bestimmte Systeme (also $n<m$), kann die Pseudoinverse über

$$Q = M\, M^{T}$$

$$E = M\, M^{T}\, Q^{-1}$$

$$M^{+} = M^{T}\, Q^{-1}$$

gebildet werden.

6.1 Beispiele für Pseudoinverse

6.1.1 Beispiel 1

Es sei f eine lineare Abbildung eines Vektorraumes V auf W, mit der Matrix M und dem Absolutgliedvektor b in W sowie der gesuchten Größe x in V gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zur Lösung des Gleichungssystems wird zunächst die quadratische Matrix Q gebildet

$$Q = M^{T}\, M$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Inverse dieser Matrix wird errechnet

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} +\frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & +\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich die Pseudoinverse M^+:

$$M^+ = Q^{-1} M^T$$

$$M^+ = \begin{pmatrix} +\frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & +\frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^+ = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Damit kann die gesuchte Größe direkt berechnet werden:

$$x = M^+ \, b$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.1.2 Beispiel 2

Es sei f eine lineare Abbildung eines Vektorraumes V auf W, mit der Matrix M und dem Absolutgliedvektor b in W sowie der gesuchten Größe x in V gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zur Lösung des Gleichungssystems wird zunächst die quadratische Matrix Q gebildet. Da die Zeilenanzahl n kleiner als die Spaltenanzahl m ist, wird die Reihenfolge der Matrizen vertauscht:

$$Q = M\, M^T$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Inverse dieser Matrix wird errechnet

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich die Pseudoinverse M^+:

$$M^+ = M^T Q^{-1}$$

$$M^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$M^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Damit kann die gesuchte Größe direkt berechnet werden:

$$x = M^+ \, b$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Zu beachten ist hierbei, dass es weitere Lösungen gibt, da die Beschreibung nicht eindeutig ist.

Die vollständige Lösung des Gleichungssystems – ermittelt mit dem GAUSS-Algorithmus – ist:[4]

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wird der Parameter zu $\mu_3 = -\frac{1}{6}$ gewählt, ergibt sich der ermittelte Lösungsvektor.

[4] Der Leser oder die Leserin möge dieses selbst einmal nachrechnen.