3 Geburts- und Todesprozesse

Die Simulation von Geburts- und Todesprozessen hat einen breiten Anwendungsbereich. Nicht nur das Wachstum von *Populationen* unterliegt den Gesetzen derartiger Prozesse. Auch die Entstehung von *Warteschlangen* oder der Abbau von *Staus* sind in dieser Form beschreibbar.

Es wird stets eine diskrete Größe in zufällig verteilten Zeiten um 1 vergrößert oder verkleinert. Die Sprünge werden zusätzlich fortlaufend nummeriert.

Es seien also:

$i \in \mathbb{N}$: Nummer des Sprunges

$x_i \in \mathbb{N}$: Population

$t_i \in \mathbb{R}_0^+$: Sprung-Zeit

so dass zwischen zwei Populationssprüngen ein Zeitraum $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, die *Wartezeit* für einen Sprung, angebbar ist. Ein jeweils betrachteter Zeitraum, der zwischen beliebigen Zeitpunkten, die im Allgemeinen nicht mit den indizierten Zeiten übereinstimmen, wird zusätzlich mit τ angegeben.

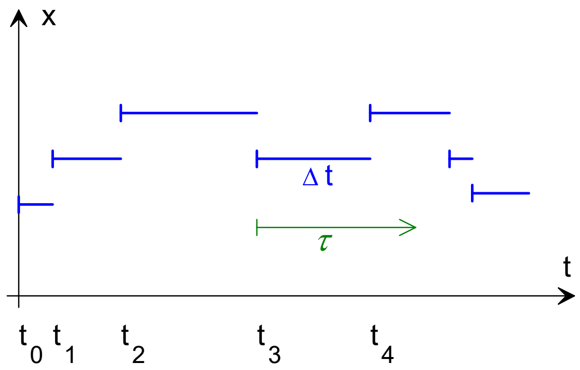

Abb. 3.0 – Geburt und Tod über die Zeit

Die sprunghaften Vergrößerungen oder Verkleinerungen der Population um jeweils eine Einheit werden als *Geburt* oder *Tod* bezeichnet. Ihr Auftreten kann in unterschiedlicher Häufigkeit, sowohl in konstanter Form, wie auch von der Nummerierung i, der Population x_i oder anderen Größen abhängig sein. Daher werden noch die Parameter

λ_i: *Geburtenrate*

μ_i: *Todesrate*

festgelegt. Mit diesen Parametern lassen sich dann die Geburts- und Todeswahrscheinlichkeiten (jeweils eines Sprunges) mit

$p(x++) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$ *Geburtswahrscheinlichkeit*

$p(x--) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$ *Todeswahrscheinlichkeit*

angeben.

Die Modellierung – und auch die Simulation – dieser Geburts- und Todesprozesse ist als MARKOW-Kette[1] darstellbar, da stets vorausgesetzt wird, eine Übergangswahrscheinlichkeit ist nur vom aktuellen Zustand, nicht aber von anderen vorhergegangenen oder nachfolgenden Zuständen abhängig – oder die Übergangswahrscheinlichkeit ist konstant.

Das Verhältnis $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ der Geburts- und Todesraten – gelegentlich als *Verkehrswert* bezeichnet – ist entscheidend für die Konvergenz (oder Divergenz) eines Prozesses.

3.1 Zeitlicher Ablauf

Die Anzahl der Populationssprünge (+1 oder -1) ist zufällig über die Zeit verteilt und folgt oftmals einer *POISSON-Dichtefunktion*[2] (es werden schließlich *seltene Ereignisse* betrachtet) oder einer *geometrischen Dichtefunktion*. In dieser Wahrscheinlichkeitsfunktion ist der einzige Parameter, der Mittelwert ($\bar{x}$ oder μ) des betrachteten Ereignisses. Da hier bereits die Todesrate mit μ bezeichnet wird und x bereits als Wert im Gebrauch ist, kann nur die in der Literatur übliche Darstellung des Mittelwertes über ein Produkt zweier Faktoren verwendet werden. Es sei also der Mittelwert der Messgröße 'Anzahl der Sprünge in der Zeit' indirekt beschrieben.

Wird etwa die Geburtsrate $\lambda = \frac{1}{3}\frac{1}{a}$ etwa auf einen Zeitraum $\Delta t = 1a$ bezogen, im konkreten Falle aber ein Zeitraum $\tau = 2a$ betrachtet, so ist hier der Geburten-Mittelwert mit $\bar{\lambda} = \lambda\tau$, also $\bar{\lambda} = \frac{2}{3}$ angebbar.

---

[1] vgl.: GUSTAV GRÖNNÄS: MARKOW-Ketten

[2] vgl.: GUSTAV GRÖNNÄS: 'Statistik und Wahrscheinlichkeit – leicht gemacht', tredition, Ahrensburg, 2024

Allgemein ist damit der Mittelwert durch die Geburts- und Todesrate bestimmt, es gilt:

$\overline{T} = (\lambda_i + \mu_i)\,\tau$ Mittelwert der Geburten und Todesfälle

$\overline{T} = b_i\,\tau$ (Kurzschreibweise)

Damit ist – sofern die Wahrscheinlichkeitsfunktion eine POISSON-Dichtefunktion ist – die Wahrscheinlichkeit p von k Sprüngen im Zeitintervall τ

$$p(k) = \frac{(\overline{T})^k}{k!}\, e^{-\overline{T}}$$

$$p(k) = \frac{(b_i\,\tau)^k}{k!}\, e^{-\,b_i\,\tau}$$

$$p(k) = \frac{((\lambda+\mu)\,\tau)^k}{k!}\, e^{-\,(\lambda+\mu)\,\tau}$$

Beispiel: Für $\lambda = 0.2, \mu = 0.6, \tau = 3$ ergibt sich $p(1) = 0.2177$

Für die geometrische Dichte ergibt sich entsprechend[3]

$$p(k) = \frac{1}{\overline{T}}\left(1 - \frac{1}{\overline{T}}\right)^k$$

$$p(k) = \frac{1}{b_i\,\tau}\left(1 - \frac{1}{b_i\,\tau}\right)^k$$

$$p(k) = \frac{1}{(\lambda+\mu)\,\tau}\left(1 - \frac{1}{(\lambda+\mu)\,\tau}\right)^k$$

Beispiel: Für $\lambda = 0.2, \mu = 0.6, \tau = 3$ ergibt sich$p(1) = 0.2431$

Die Wahrscheinlichkeit mindestens eines Sprunges innerhalb eines betrachteten Zeitintervalls τ (vgl. Abb. 3.0) ist dann berechenbar mit

$$p(\Delta t \leq \tau) = 1 - e^{-b_i \tau}$$

$$p(\Delta t \leq \tau) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)\tau}.$$

In der Simulation dieser Prozesse kann dann mittels einer Zufallszahl $u \in\,]0;1[$ eine Zeit t_i generiert werden, gemäß

$$t_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u).$$

[3]Für eine größere Anzahl der Sprünge sind die Unterschiede beider Funktionen deutlicher. Der Leser oder die Leserin möge dieses selbst nachrechnen.

3.2 Spezielle Geburts- und Todesprozesse

Eine typische Anwendung der Geburts- und Todesprozessbeschreibung ist die Simulation von Warteschlangen in ihren Aufbau- und Abbaugeschehen.

3.2.1 Telefonwarteschlange

In einem Telefon-Servicecenter seien die ankommenden Anrufe (hier für genau einen bestimmten Mitarbeiter) über einen konstanten Parameter gegeben. Dieser Parameter gibt somit die Geburtenrate λ an.

Die ankommenden Anrufe werden nach einander in konstanter Geschwindigkeit bearbeitet und müssen gegebenenfalls auf die Bearbeitung warten, da schon eine Bearbeitung eines anderen Vorganges erfolgt. Auf Grund der konstanten Bearbeitungsgeschwindigkeit lässt sich die Verkürzung der Warteschlange mittels der konstanten Todesrate μ beschreiben. Dieses Modell wird in der Literatur als *'single server'* bezeichnet.

Zu Beginn einer Betrachtung (also in $i=0$) sei eine Warteschlangenlänge x_0 gegeben, dann ist das Simulationsmodell allein über

$\lambda = const$	Geburtenrate
$\mu = const$	Todesrate

beschrieben.

Ist nun also das Verhältnis $1 < \frac{\lambda}{\mu}$ zu Gunsten des Wachstums verschoben, so stellt sich eine instabile Situation ein, mit einem unkontrollierten Anwachsen der Warteschlange.

Entsprechend ist der Fall $\frac{\lambda}{\mu} = 1$ indifferent.

Für das Verhältnis $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ ergibt sich eine *stationäre Verteilung* für die Warteschlangenlänge x_i nach der *geometrischen Dichte*

$$p(x_i = k) = \frac{\mu-\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k.$$

Eine Simulation[4] mit den Parametern $\lambda = 0.5;\ \mu = 0.7;\ x_0 = 10$ erzeugt etwa den Grafen

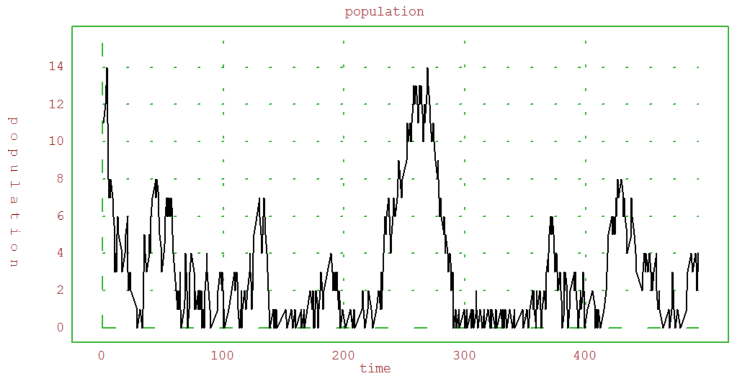

Abb. 3.2.1 – Simulation einer Telefonwarteschlange

3.2.2 Bedientresen

Dieses Modell wird in der Literatur unter der Bezeichnung *'telephone trunking'* beschreiben. Im Unterschied zum vorigen Modell wird hier noch ein zusätzlicher Sterbeeffekt berücksichtigt. Die Länge der Warteschlange sei für die Wartenden (und neu Ankommenden) sichtbar, so dass die Sterberate proportional mit der Warteschlangenlänge wachsend ist. Für die Parameter der Modellierung ergeben sich demnach

$\lambda = const$ Geburtenrate

$\mu_i = \mu\ x_i$ Todesrate[5]

Zu Beginn einer Betrachtung (also in $i = 0$) sei wieder eine Warteschlangenlänge x_0 gegeben.

Für das Verhältnis $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ergibt sich eine *stationäre Dichte* für die Warteschlangenlänge x_i nach der *POISSON-Verteilung*

$$p(x_i = k) = \frac{\rho^k}{k!}\ e^{-\rho}.$$

Des Weiteren lässt sich ein zu erwartender Mittelwert, also ein *Erwartungswert E*, für die Warteschlangenlänge angeben mit

$$E(x_i) = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{\mu t_i}) + x_0 e^{-\mu t_i}$$

mit dem Grenzwert

$$E(x_\infty) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

---

[4]Sämtliche dargestellten Simulationen wurden mit dem Mathematikprogramm *'Euler Math Toolbox' EMT* (Version 12.9) durchgeführt. http://euler.rene-grothmann.de/

[5]fälschlich und häufig wird in der Literatur $\mu_i = \mu\ i$ geschrieben

Eine Simulation mit den Parametern $\lambda = 0.5$; $\mu = 0.1 x_i$; $x_0 = 10$ erzeugt etwa den Grafen

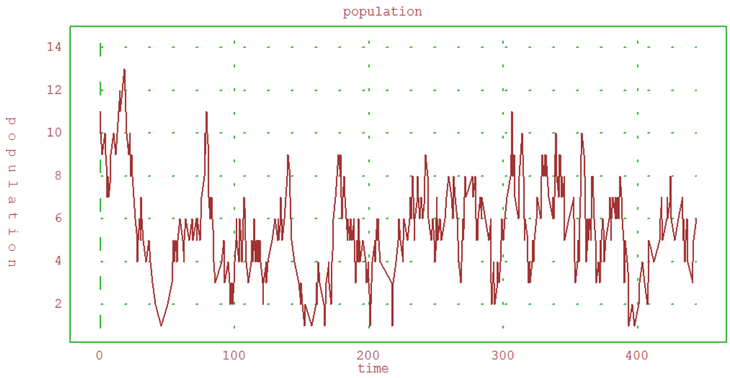

Abb. 3.2.2 – Simulation einer Bedientresenwarteschlange