Gustav Grönnäs

Kurzübersicht

Markow-Ketten

1 Problemstellung

Durchlaufen *Objekte* einen *Prozess*, so werden sie in ihren Eigenschaften verändert – andernfalls wäre der Prozess wirkungslos und daher nicht weiter zu betrachten. Werden nun die *Objekteigenschaften* x zu einem bestimmten *Zeitpunkt* t_j betrachtet, so werden die Tupel der Okjekteigenschaften $x = (x_1; x_2; \ldots x_n)$ als *Zustände* (des Prozesses) bezeichnet.

Häufig durchlaufen Objekte einen oder mehrere Prozesse mehrfach, so dass sich Ketten und Schleifen von Prozessabläufen ergeben. Die Zustände des Systems unterliegen bestimmten Gesetzmäßigkeiten, die nicht notwendigerweise bekannt sein müssen, zumeist sind die Abläufe zufälliger Natur. Die Beschreibung solcher Prozesse mit ihren Zuständen wird als Markow-Kette bezeichnet.

Die Darstellung einer Markow-Kette ergibt sich aus einer textlichen Beschreibung zumeist zunächst in der Form eines Grafen. Dieser Graf lässt sich in eine symbolische Form überführen und erlaubt damit auch eine numerische Betrachtung. Die numerische Betrachtung erlaubt schließlich die Angabe von Endzuständen oder stabilen, sich stets wiederholenden Zuständen des Systems.

2 Ablaufdiagramm – gerichteter Graf

Die Beschreibung eines Prozesses kann als Aufzählung der Teil-Zustände eines Systems erfolgen. Da sich im Allgemeinen aus einem Zustand mehrere Folgezustände ergeben können, ist die Darstellung des Prozesses als Graf anschaulich möglich. Dabei werden die Zustände als feste Marken (zumeist beschriftete Kreise) und die Übergänge zwischen jeweils zwei Zuständen als Pfade (Verbindungslinien) dargestellt.

Häufig ergeben sich die Zustandsänderungen in definierter zeitlicher Abfolge, so dass ein Zustand Z_1 in einen Zustand Z_2 übergehen kann, die Umkehrung aber ausgeschlossen ist. Der Graf ist dann gerichtet, die Zustandsänderungen werden als Pfeile dargestellt.[1]

In der Prozessbeschreibung kann auch ein Stillstand beschrieben werden, in diesem Falle geht ein Zustand 'in sich selbst' über.

Die Zustandsübergänge erfolgen jeweils mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten, die bevorzugt an die Pfade geschrieben werden:

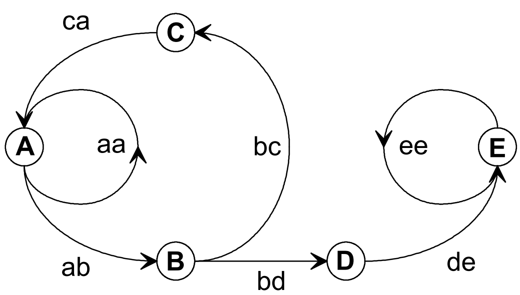

Abb 2 – gerichteter Graf einer Markow-Kette

Sind die Zustandsübergänge von der Zeit unabhängig, so können Übergänge vom Zustand Z_1 zum Zustand Z_2 ebenso erfolgen, wie vom Zustand Z_2 zum Zustand Z_1. Der Graf ist in diesem Fall ungerichtet.

[1]vgl.: Gustav Grönnäs: 'Statistik und Wahrscheinlichkeit – leicht gemacht'; tradition; Ahrensburg; 2024

3 Matrixdarstellung

Während die Beschreibung eines Prozesses mittels eines Grafen sehr anschaulich ist, bedarf die rechnerische Erfassung des Prozesses der Angabe der Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen.

Da grundsätzlich ein jeder Zustand in jeden Zustand übergehen kann ergibt sich die Angabe der Übergangswahrscheinlichkeiten stets als quadratische Matrix. Ein unmöglicher Zustandsübergang hat dann die Wahrscheinlichkeit 0.

Es sei etwa der nachfolgende Prozess-Graf gegeben:

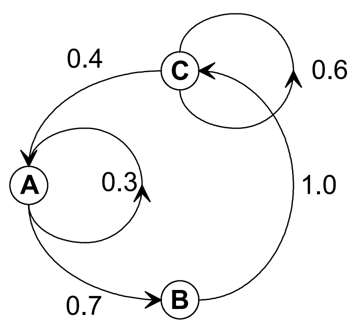

Abb 3 – Graf einer MARKOW-Kette

In diesem Beispiel erfolgen die Wechsel von einem Zustand zu dem nächsten Zustand mit den Wahrscheinlichkeiten

- von A nach A mit $p_{AA} = 0.3$
- von A nach B mit $p_{BA} = 0.7$
- von B nach C mit $p_{CB} = 1.0$
- von C nach A mit $p_{AC} = 0.4$
- von C nach C mit $p_{CC} = 0.6$

Der Zustand B wird hier nur aufgeführt, um aufzuzeigen, dass auch Pfade angegeben werden können, deren Beschreibung überflüssig ist, da sie sichere oder unmögliche Ereignisse beschreiben.

Wird nun eine Matrix M der Zustandswechselwahrscheinlichkeiten aufgestellt, dann muss diese Matrix genau so viele Elemente enthalten, wie Zustandswechsel möglich sind. Im allgemeinen Fall kann jeder Zustand in jeden Zustand – einschließlich sich selbst – überführt werden. Für eine Zustand-Anzahl n sind damit für jeden Zustand n Wechsel, also insgesamt $n \times n$ Wechsel möglich. Die Angabe der Wahrscheinlichkeiten dieser Wechsel führt daher auf eine Matrix des Typs $n \times n$:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

Werden nun die Koeffizienten der Matrix so indiziert, dass der erste Index i den jeweiligen neuen Zustand und der zweite Index j den Ausgangszustand bezeichnen, dann ergibt sich die Wechselmatrix zu

$$M = \left(m_{\text{Neuzustand; Altzustand}}\right).$$

Vergleiche hierzu auch das 'Input-Output-Modell' der linearen Algebra.

Für das obige Beispiel ergibt sich die Wechselmatrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Da ein Wechsel vom Zustand A in den Zustand C nicht möglich ist, wird hier die Wahrscheinlichkeit zu Null. In jeder Spalte ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten gleich 1, da die Matrix vollständig alle Zustandswechsel beschreibt.

Sind die Zustandswechsel von der Zeit unabhängig, so dass die Richtung des Grafen keine Bedeutung hat, ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten der Zustandswechsel in beide Richtungen gleich. Die Gleichheit der Wahrscheinlichkeiten $p_{AB} = p_{BA}$ führt auf eine symmetrische Matrix der Zustandswechsel – diese Matrix heißt dann *stochastisch*:

$$M_{sym} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{12} & m_{22} & & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1n} & m_{2n} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

4 Prozessbeschreibung

Eine Beschreibung des gesamten Prozesses kann nun erfolgen mittels der Angabe des Vektors x_0 der Objekteigenschaften zu Beginn des Prozesses und der Angabe der Wahrscheinlichkeiten der Zustandswechsel $M_{n \times n}$. Der Vektor der Objekteigenschaften zu Beginn, der Eingangsvektor x_0 wird durch den Prozess M verändert, so dass sich der neue Zustandsvektor x_1 ergibt:

$$x_1 = M\,x_0.$$

Werden also der Eingangsvektor

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ \vdots \end{pmatrix}$$

und die Zustandswechselmatrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

ausführlich angegeben, ergibt sich der Zustandsvektor nach einem Prozessdurchlauf zu

$$\begin{pmatrix} x_{A1} \\ x_{B1} \\ x_{C1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{A0} \\ x_{B0} \\ x_{C0} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Für das obige Beispiel eines Prozesses mit der Zustandswechselmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

seien die quantitativen Eigenschaften der Objekte in den Zuständen $\{A; B; C\}$ gegeben über den Eingangsvektor

$$x_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix},$$

dann ergeben sich die Objekteigenschaften nach einem einmaligen Prozessdurchlauf gemäß

$$x_1 = M\,x_0$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 22 \\ 14 \\ 54 \end{pmatrix}.$$

5 Prozesswiederholung

Wird eine MARKOW-Kette mehrfach durchlaufen, so wird in der Beschreibung des Prozesses, mehrfach mit der Wechselmatrix M multipliziert. Zur Beschreibung des Prozesses sind also die Potenzen M^k der Wechselmatrix zu bilden:

$$x_1 = M\,x_0$$

$$x_2 = M^2\,x_0$$

$$\vdots$$

$$x_k = M^k\,x_0$$

Für das obige Beispiel ergeben sich also die potenzierten Matrizen:

$$M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0.6 \end{pmatrix},$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.40 & 0.36 \\ 0.21 & 0 & 0.28 \\ 0.70 & 0.60 & 0.36 \end{pmatrix},$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0.307 & 0.360 & 0.252 \\ 0.063 & 0.280 & 0.252 \\ 0.630 & 0.360 & 0.496 \end{pmatrix},$$

$$M^\infty = \begin{pmatrix} 0.2899 & 0.2899 & 0.2899 \\ 0.2029 & 0.2029 & 0.2029 \\ 0.5072 & 0.5072 & 0.5072 \end{pmatrix}.$$

Es seien wieder die quantitativen Eigenschaften der Objekte in den Zuständen $\{A; B; C\}$ gegeben über den Eingangsvektor

$$x_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix},$$

dann ergeben sich die Objekteigenschaften nach 'unendlich vielen' Prozessdurchläufen gemäß

$$x_\infty = M^\infty\,x_0$$

$$x_\infty = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}^\infty \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$x_\infty = \begin{pmatrix} 26.09 \\ 18.26 \\ 45.65 \end{pmatrix}.$$