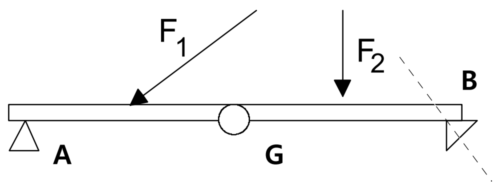
Textauszug aus und Ergänzung zu:
'Die Techniken des Gleichunglösens' – Band 2, Lineare Gleichungssysteme
ISBN 978-3-8334-9308-9

# Berechnung der Lagerkräfte in einem statischen System

Das Problem: In einem statischen System mit angreifenden Kräften, Lagern und eventuell auch Gelenken seien die Lagerkräfte zu berechnen.

## B Beispiel zur Berechnung der Lagerkräfte in einem statischen System

Es sei das nachfolgend skizzierte statische System mit dem festen Lager A, das auch Momente aufnehmen kann, einem Gelenk G, das Kräfte in allen Dimensionen aufnehmen kann, einem schrägen Loslager B und den angreifenden Kräften $F_1$ und $F_2$ gegeben:




Dabei seien die angreifenden Kräfte (nach unten wirkend):

$F_1$ = -150kN

$F_2$ = -80kN,

die Kraft $F_1$ bilde mit der Horizontalen einen Winkel

$\varphi_1 = 30°$

und das Lager B nehme Kräfte unter dem Winkel

$\varphi_B = 135°$

zur Horizontalen auf.

Die vertikalen Entfernungen von Lager A seien ausnahmslos gleich Null und die horizontale Entfernungen vom Lager A seien:

| | |
|---|---|
| $F_1$: | $s_1$=1m |
| $F_2$: | $s_2$=3m |
| G: | $s_G$=2m |
| B: | $s_B$=4m . |

Zu berechnen seien die Lager- und Gelenkkräfte.

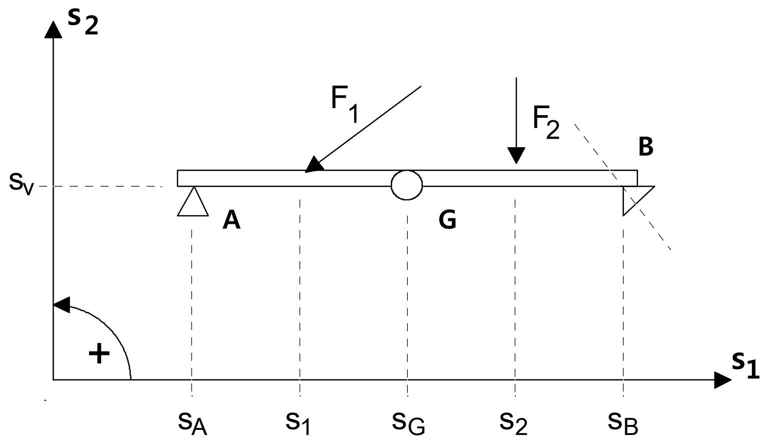
ISBN 978-3-8334-9308-9

## 1 Festlegung des Koordinatenursprungs

Durch die Bemaßung des Systems ist zumeist schon die Lage des Koordinatensystems gegeben. Es wird ein Koordinatenursprung an beliebigem Ort gewählt. Die positive Achsenrichtung (nach rechts, nach oben) und die positive Drehrichtung (gegen den Uhrzeigersinn) werden festgelegt.

### B 1 Beispiel zur Festlegung des Koordinatenursprungs

Es sei das statische System aus B gegeben. Der Ursprung des Koordinatensystems wird in Lager A gewählt, in die Skizze jedoch links unterhalb dieses Lagers eingetragen, so dass eine Bemaßung problemlos möglich wird. Die positiven Achsenrichtungen und die positive Drehrichtung werden ebenfalls festgelegt und eingetragen:




## 2 Zerlegung aller Kräfte in ihre Komponenten der Dimensionen

Ist eine schräg unter einem Winkel $\varphi_i$ zu den Koordinatenachsen angreifende Kraft F von ihrem Betrage $\|F\|$ (*Euklidische Norm*) gegeben, so sind ihre Komponenten $F_i$ in Achsenrichtungen zu berechnen gemäß:

$$F_i = \|F\| \cos(\varphi_i)$$

Treten Belastungen auch über Strecken verteilt auf, so sind diese Belastungen zunächst auf punktförmig angreifende Kräfte umzurechnen (vgl. Seite 16), diese Kräfte wirken dann im Allgemeinen in Richtungen der Achsen, eine Kraftzerlegung ist dann nicht erforderlich.

### B 2 Beispiel zur Zerlegung von Kräften in Komponenten der Dimensionen

Es sei das statische System aus B 1 gegeben.
Die Kraft $F_1$ greift unter einem Winkel $\varphi_1 = 30°$ zur ersten Achse, nach unten wirkend, an. Unter Berücksichtigung des Vorzeichens der Kraft ist also ihr Betrag $\|F\| = 150 kN$, ihr Winkel zur ersten Achse $\varphi_1 = 210°$ und ihr Winkel zur zweiten Achse $\varphi_2 = 120°$.
Ihre Komponenten bezüglich der Achsen errechnen sich dann zu

$$F_{11} = \|F\| \cos(\varphi_1) \qquad F_{12} = \|F\| \cos(\varphi_2)$$

$$F_{11} = 150 \cdot 10^3 N \cos(210°) \qquad F_{12} = 150 \cdot 10^3 N \cos(120°)$$

$$F_{11} = -129{,}9 \cdot 10^3 N \qquad F_{12} = -75 \cdot 10^3 N$$

ISBN 978-3-8334-9308-9

## 3 Eintragung aller Lager- und Gelenkkräfte

Es werden alle Lager- und Gelenkkräfte in achsenparalleler Lage eingetragen und benannt. Dabei ist das Folgende zu beachten:

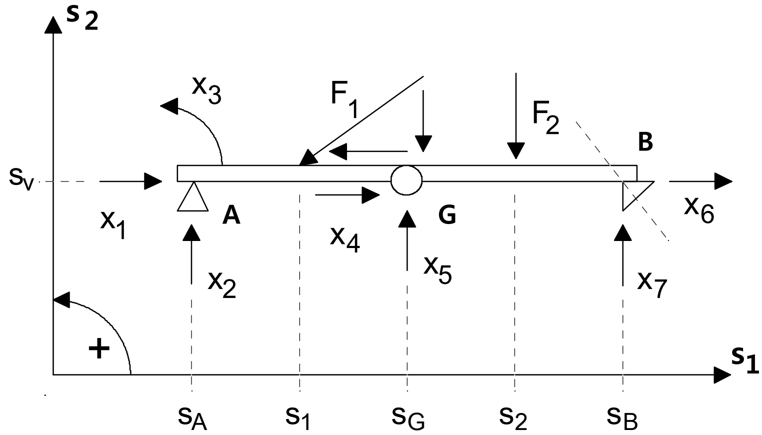
- An die festen Lager werden die Lagerkräfte in positiven Achsenrichtungen in allen Dimensionen eingetragen.
- An die losen Lager werden nur die Kräfte eingetragen, die das Lager aufnehmen kann, falls die Kraftrichtung mit der Achsenrichtung übereinstimmt. Anderenfalls sind auch hier die Lagerkräfte in allen Achsenrichtungen einzutragen.
- Nimmt ein Lager Momente auf, so sind auch diese einzutragen (positive Zählrichtung – gegen den Uhrzeigersinn – beachten).
- Gelenke können sehr unterschiedlich konstruiert sein. Einige nehmen Kräfte in allen Richtungen auf, andere wiederum nur in einer Richtung (z.B.: ein lose aufliegender Balken). Hier gilt das für lose Lager Gesagte.

## B 3 Beispiel zur Eintragung aller Lager- und Gelenkkräfte

Es sei das statische System aus B 1 gegeben.
In Lager A greifen sowohl horizontale, als auch vertikale Kräfte an. Lager B nimmt horizontale und vertikale, miteinander verknüpfte Kräfte auf und das Gelenk G nimmt Kräfte in allen Dimensionen auf:
Die Bezeichnungen werden festgelegt, es seien:

$x_1$: Die horizontale Kraft in Lager A
$x_2$: Die vertikale Kraft in Lager A
$x_3$: Das Moment in Lager A
$x_4$: Die horizontale Kraft in Gelenk G
$x_5$: Die vertikale Kraft in Gelenk G
$x_6$: Die horizontale Kraft in Lager B
$x_7$: Die vertikale Kraft in Lager B

Die Bezeichnungen werden in die Skizze eingetragen:



ISBN 978-3-8334-9308-9

# 4 Aufstellung des Gleichungssystems

## 4.1 Anwendung der Gleichgewichtsbedingung für Kräfte in Richtung der ersten Dimension

Da die Summe aller Kräfte in einer Dimension stets Null ergeben muss (andernfalls würde das System beschleunigt, wäre also nicht statisch), ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung zu:

$$\sum_j F_{ij} = 0 \qquad ; i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; \text{ i:Dimension}$$

Dabei ist zu beachten, dass Gelenke eine Begrenzung eines Systems darstellen, so dass diese Gleichgewichtsbedingung für jedes Teilsystem bis zu einem Gelenk anzuwenden ist.
Die Gelenkkräfte sind dann in beiden Systemen, jedoch mit entgegengesetzten Vorzeichen, zu verwenden.
Das heißt: Es seien $S_1$, $S_2$ zwei Systeme mit den Kräften
$F_{i1j}$ im System $S_1$
$F_{i2j}$ im System $S_2$

und der Gelenkkraft $x_G$, dann gilt im System $S_1$

$$\sum_j F_{i1j} + x_G = 0$$

und im System $S_2$

$$\sum_k F_{i1k} - x_G = 0$$

## B 4.1 Beispiel für die Anwendung der Gleichgewichtsbedingung für Kräfte in der ersten Dimension

Es sei das statische System aus B 1 mit dem Gelenk G, den angreifenden Kräften $F_1$; $F_2$ sowie den Lagerkräften $x_1$; $x_2$; $x_6$; $x_7$, dem Moment $x_3$ und den Gelenkkräften $x_4$; $x_5$ gegeben.

Im System $S_1$ wirken die horizontalen Kräfte $x_1$; $x_4$ und $F_{11}$=-129,9kN, es gilt:

$$x_1 + x_4 + F_{11} = 0$$

I $\quad x_1 + x_4 - 129{,}9 \cdot 10^3 = 0$

Im System $S_2$ wirkt die horizontale Lagerkraft $x_6$ und die horizontale Gelenkkraft $x_4$. Da $x_4$ aber im System $S_1$ schon positiv verwendet wurde, ist also im System $S_2$ die Gelenkkraft $x_4$ negativ, somit:

II $\quad -x_4 - x_6 = 0$

ISBN 978-3-8334-9308-9

## 4.2 Anwendung der Gleichgewichtsbedingung für Kräfte in der zweiten Dimension

Für die Kräfte in der zweiten (und ggf. dritten) Dimension gelten die gleichen Regeln wie für die Kräfte in der ersten Dimension. Es ist also wie in Abschnitt 4.1 vorzugehen, mit dem Unterschied, dass statt der Kräfte in der ersten Dimension die Kräfte in der zweiten (dritten) Dimension zu verwenden sind.

## B 4.2 Beispiel für die Anwendung der Gleichgewichtsbedingung für Kräfte in der zweiten Dimension

Es sei das statische System aus B 1 gegeben. Die vertikalen Kräfte im System $S_1$ sind $x_2$; $x_5$ und $F_{12} = -75kN$ . Es ergibt sich also

$$x_2 + x_5 + F_{12} = 0$$

III $\quad x_2 + x_5 - 75 \cdot 10^3 = 0$

Im System $S_2$ sind die vertikalen Kräfte $x_5$; $x_7$ und $F_2 = -80kN$. Damit ergibt sich unter Berücksichtigung, dass $x_5$ als Gelenkkraft im System $S_1$ positiv verwendet wurde:

$$-x_5 + x_7 + F_2 = 0$$

IV $\quad -x_5 + x_7 - 80 \cdot 10^3 = 0$

## 4.3 Aufstellung der Kraftgleichungen für verknüpfte Kräfte

Nimmt ein loses Lager oder ein Gelenk **schräge** (das heißt: nicht achsenparallele) Kräfte auf, so sind diese Kräfte miteinander verknüpft. Da für jede Kraftkomponente $F_i$ (vergleiche Abschnitt 2) in der i. Dimension gilt

$$F_i = \|F\| \cos(\varphi_i),$$

folgt durch Umstellen und Gleichsetzen:

$$\frac{1}{\cos(\varphi_i)} F_i = \frac{1}{\cos(\varphi_{i+1})} F_{i+1}$$

Das heißt: Für jedes lose Lager oder Gelenk mit **schräg** wirkenden Kräften wird eine Verknüpfungsgleichung aufgestellt gemäß:

$$\frac{1}{\cos(\varphi_i)} F_i - \frac{1}{\cos(\varphi_{i+1})} F_{i+1} = 0$$

## B 4.3 Beispiel für die Aufstellung einer Kraftgleichung für verknüpfte Kräfte

Es sei das statische System aus B 1 gegeben.
Das lose Lager B nimmt schräg wirkende Kräfte auf. Die Lagerkraft $x_6$ bildet zur ersten Achse einen Winkel $\varphi_1 = 135°$ und die Lagerkraft $x_7$ bildet zur zweiten Achse einen Winkel $\varphi_2 = 45°$.
Also gilt:

$$\frac{1}{\cos(135°)} x_6 - \frac{1}{\cos(45°)} x_7 = 0$$

V $\quad -1{,}414\, x_6 - 1{,}414\, x_7 = 0$

ISBN 978-3-8334-9308-9

## 4.4 Anwendung der Gleichgewichtsbedingung für Momente

Da das System statisch ist, wird es auch nicht in Rotation versetzt. Also muss die Summe aller Momente um einen beliebigen Punkt stets Null sein.
Das heißt: In einem statischen System S gilt in jedem Punkt P für die Momente $M_j$

$$\sum_j M_j = 0$$

und da das Moment $M_j$ das Produkt aus dem Hebel s vom Drehpunkt $P_k$ zum Kraftangriffspunkt $P_j$ und der auf dem Hebel senkrecht stehenden Kraft $F_j$ ist (*Kreuzprodukt*), gilt für jedes Moment $M_j$ um den Punkt $P_k$

$$M_j = \left(s_j - s_k\right) F_j$$

Es werden für mindestens so viele Punkte Momentengleichungen aufgestellt, wie noch Gleichungen benötigt werden (die Gesamtgleichungsanzahl sollte mindestens so groß sein, wie die Anzahl der Unbekannten).
Dabei ist zu beachten:

- Lager, die selbst Momente aufnehmen, erzeugen kein Moment **um andere Punkte**. Sie bleiben also bei der Aufstellung der Momentengleichungen unberücksichtigt.
- Gelenke übertragen keine Momente. Es sind also nur Momente jeweils eines Systems zu verwenden.
- Die Momente **um ein Gelenk** werden jeweils nur aus einem System verwendet. Es lassen sich also 'links- und rechtsseitige' Momentengleichungen um ein Gelenk aufstellen.
- Besteht ein statisches System aus **mehreren Teilsystemen** (das heißt: es enthält Gelenke), so ist für **jedes** Teilsystem mindestens eine Momentengleichung aufzustellen.

## B 4.4 Beispiel für die Anwendung der Gleichgewichtsbedingung für Momente

Es sei das statische System aus B 1 gegeben
Auf das Lager A wirken die Momente $(s_1 - s_A)F_{12}$; $(s_G - s_A)x_5$ sowie das von Lager A aufgenommene Moment $x_3$. Unter Berücksichtigung der Drehrichtungen ergibt sich:

$$x_3 + \left(s_G - s_A\right) x_5 + (s_1 - s_A)\, F_{12} = 0$$

VI $\quad x_3 + 2\,x_5 - 75 \cdot 10^3 = 0$

Für das Gelenk G wird linksseitig keine Gleichung aufgestellt, da das Lager A selbst Momente aufnimmt und daher kein Moment um das Gelenk G erzeugt.
Um das Gelenk G wirken rechtsseitig die Momente $(s_B - s_G)x_7$ und $(s_2 - s_G)F_2$ (außerdem noch $0x_6$). Es ergibt sich unter Berücksichtigung der Drehrichtungen:

$$\left(s_B - s_G\right) x_7 + \left(s_2 - s_G\right) F_2 = 0$$

VII $\quad 2\,x_7 - 80 \cdot 10^3 = 0$

Damit ist dann auch für jedes Teilsystem eine Momentengleichung aufgestellt.

ISBN 978-3-8334-9308-9

**Anmerkung**

Die Zusammenfassung der Gleichungen I...VII des Beispiels zu einem Gleichungssystem liefert:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | $+1X_1$ | $+0X_2$ | $+0X_3$ | $+1X_4$ | $+0X_5$ | $+0X_6$ | $+0X_7$ | = | 129,9k |
| II | $+0X_1$ | $+0X_2$ | $+0X_3$ | $-1X_4$ | $+0X_5$ | $+1X_6$ | $+0X_7$ | = | 0 |
| III | $+0X_1$ | $+1X_2$ | $+0X_3$ | $+0X_4$ | $+1X_5$ | $+0X_6$ | $+0X_7$ | = | 75k |
| IV | $+0X_1$ | $+0X_2$ | $+0X_3$ | $+0X_4$ | $-1X_5$ | $+0X_6$ | $+1X_7$ | = | 80k |
| V | $+0X_1$ | $+0X_2$ | $+0X_3$ | $+0X_4$ | $+0X_5$ | $-1{,}414X_6$ | $-1{,}414X_7$ | = | 0 |
| VI | $+0X_1$ | $+0X_2$ | $+1X_3$ | $+0X_4$ | $+2X_5$ | $+0X_6$ | $+0X_7$ | = | 75k |
| VII | $+0X_1$ | $+0X_2$ | $+0X_3$ | $+0X_4$ | $+0X_5$ | $+0X_6$ | $+2X_7$ | = | 80k |

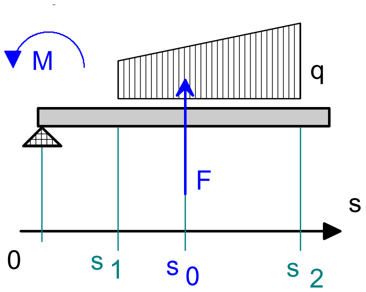
mit den Lösungen:

| | |
|---|---|
| horizontale Kraft in Lager A: | $x_1$= 169,9kN |
| vertikale Kraft in Lager A: | $x_2$= 115,0kN |
| Moment in Lager A: | $x_3$= 155,0kNm |
| horizontale Kraft in Gelenk G: | $x_4$=-40,00kN |
| vertikale Kraft in Gelenk G: | $x_5$=-40,00kN |
| horizontale Kraft in Lager B: | $x_6$=-40,00kN |
| vertikale Kraft in Lager B: | $x_7$= 40,00kN |

ISBN 978-3-8334-9308-9

## 5 Umrechnung von Streckenlasten in Punktlasten

In vielen statischen Systemen treten Belastungen nicht nur punktförmig, sondern auf Strecken verteilt auf. Solche *Streckenlasten* können auf punktförmige Belastungen umgerechnet werden, so dass sich das bisher besprochene Vorgehen auch für Belastungen, die auf Strecken wirken, anwenden lässt.
Eine Streckenlast ist über eine Funktion f beschrieben, die im Allgemeinen linear ist, aber grundsätzlich von beliebiger Struktur sein kann. Die Streckenlast $q$ wirkt auf einer Strecke, die relativ zu einem gerade betrachteten Lager beschrieben wird – ihre Anfangs- und Endkoordinaten seien hier mit $s_1$ und $s_2$ bezeichnet. Bezüglich des Lagers ergibt sich dann eine Ersatzkraft $F$, die in einem Angriffsort $s_0$ wirkt:




Da die resultierende Kraft $F$ das Integral der Streckenlast $q$ über die Strecke $s$ ist

$$F = \int q\,ds$$

und sich entsprechend das Moment $M$ als Integral des Produktes aus der Streckenlast $q$ und des Hebels $s$ über die Strecke $s$ ergibt

$$M = \int qs\,ds,$$

lassen sich die Ersatzkraft und auch der Ersatzkraftangriffspunkt leicht ermitteln. Für den Kraftangriffspunkt kann die Definition des Momentes $M$

$$M = F s$$

nach der Hebellänge $s$ umgestellt werden. Es ergibt sich daher

$$\frac{M}{F} = s.$$

Für eine Streckelast $q$, die mittels einer linearen Funktion f beschrieben werden kann, also

$$f: q = a_1 s + a_0$$

ergeben sich die Ersatzkraft $F$

$$\boxed{F \Big|_{s_1}^{s_2} = \frac{1}{2} a_1 \left(s_2^2 - s_1^2\right) + a_0 \left(s_2 - s_1\right)}$$

das resultierende Moment $M$

$$M \Big|_{s_1}^{s_2} = \frac{1}{3} a_1 \left(s_2^3 - s_1^3\right) + \frac{1}{2} a_0 \left(s_2^2 - s_1^2\right)$$

und damit die Kraftangriffskoordinate $s_0$

$$s_0 = \frac{\frac{1}{3} a_1 \left(s_2^3 - s_1^3\right) + \frac{1}{2} a_0 \left(s_2^2 - s_1^2\right)}{\frac{1}{2} a_1 \left(s_2^2 - s_1^2\right) + a_0 \left(s_2 - s_1\right)}$$

vereinfacht zu

$$\boxed{s_0 = \frac{\frac{1}{3} a_1 \left(s_2^2 + s_2 s_1 + s_1^2\right) + \frac{1}{2} a_0 \left(s_2 + s_1\right)}{\frac{1}{2} a_1 \left(s_2 + s_1\right) + a_0}}.$$

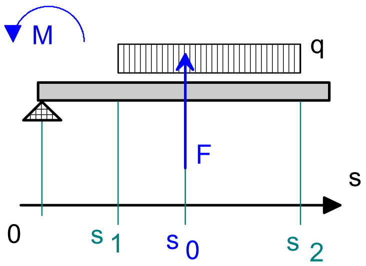
ISBN 978-3-8334-9308-9

Für die beiden Standardfälle einer konstanten Streckenlast oder einer Dreieckslast seien nachfolgend noch die resultierenden Kräfte und Kraftangriffspunkte angegeben:

## 5.1 Konstante Streckenlast

Ist nun die Streckenlast konstant, können entsprechend für die Funktion

$$f: q = a_0 = \text{const}$$




die resultierende Kraft und der Kraftangriffspunkt ermittelt werden mit

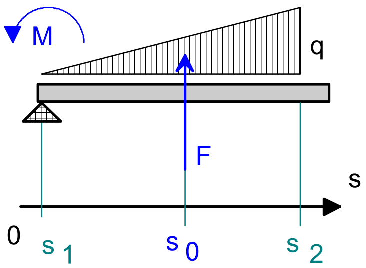
$$\boxed{F\Big|_{s_1}^{s_2} = a_0\,(s_2 - s_1)}$$

$$\boxed{s_0 = \frac{1}{2}(s_2 + s_1)}$$

## 5.2 Dreieckslast

Entsprechend ergeben sich für eine *'Dreieckslast'*

$$f: q = a_1 s$$




die Kraft $F$ und ihr Angriffspunkt $s_0$ (mit der Anfangskoordinate 0 der Dreieckslast)

$$F\Big|_{0}^{s_2} = \frac{1}{2}a_1\left(s_2^2 - 0^2\right)$$

$$s_0 = \frac{2}{3}\frac{\left(s_2^2+s_2 0+0^2\right)}{(s_2+0)}$$

$$\boxed{F\Big|_{0}^{s_2} = \frac{1}{2}a_1\,s_2^2}$$

$$\boxed{s_0 = \frac{2}{3}s_2}$$

ISBN 978-3-8334-9308-9

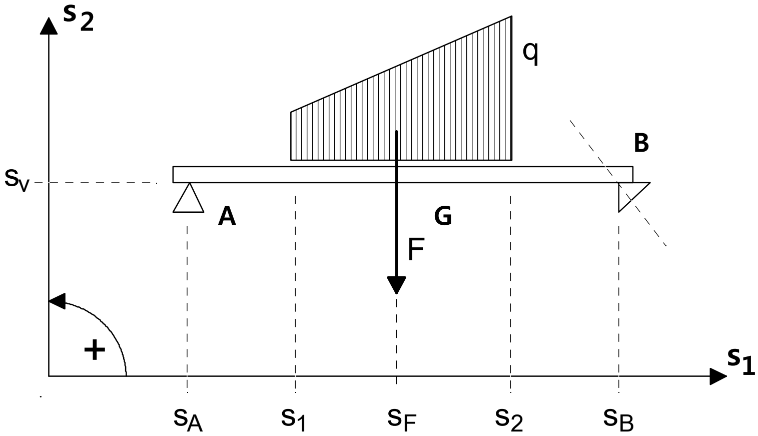
## B 5 Beispiel zur Umrechnung von Streckenlasten auf Punktlasten

Es sei ein statisches System, mit einer angreifenden Streckenlast, gegeben. Die Gleichung der Streckenlast sei (bezogen auf das bereits eingetragene Koordinatensystem)

$$f: q = 15\tfrac{kN}{m}s + 10kN.$$

Die Anfangs- und Endkoordinaten der Last seien

$$s_1 = 1m;\ s_2 = 3m.$$




Für die Ersatzkraft $F$ ergibt sich damit

$$F\Big|_{1m}^{3m} = \tfrac{1}{2}15\tfrac{kN}{m}\left((3m)^2 - (1m)^2\right) + 10kN((3m) - (1m))$$
$$F\Big|_{1m}^{3m} = 80kN.$$

Die resultierende Kraftangriffskoordinate $s_F$ ist somit

$$s_F = \frac{\tfrac{1}{3}15\tfrac{kN}{m}\left((3m)^2+(3m)(1m)+(1m)^2\right)+\tfrac{1}{2}10kN((3m)+(1m))}{\tfrac{1}{2}15\tfrac{kN}{m}((3m)+(1m))+10kN}$$
$$s_F = 2.125m.$$

Damit sind die Ersatzdaten ermittelt.

**Anmerkung:** Die Ersatzkraft erzeugt mit der Ersatzkraftangriffskoordinate ein Moment um das linke Lager A

$$M = F s_F$$
$$M = 80kN\,2.125m$$
$$M = 170kNm$$

die gleich dem erzeugten Moment aus der Integration der Streckenlast

$$M = \tfrac{1}{3}a_1\left(s_2^3 - s_1^3\right) + \tfrac{1}{2}a_0\left(s_2^2 - s_1^2\right)$$
$$M = \tfrac{1}{3}15\tfrac{kN}{m}\left((3m)^3 - (1m)^3\right) + \tfrac{1}{2}10kN\left((3m)^2 - (1m)^2\right)$$
$$M = 170kNm$$

ist.