

1 Tilgungsarten

1.1 Ratentilgung

Bei der Ratentilgung wird eine Schuld durch regelmäßige, konstante Tilgung, bei zusätzlicher Zahlung der Zinsen getilgt.

Es seien:

- p : Der Zinssatz, bezogen auf einen Abrechnungsabschnitt
- p_N : Der Nominalzinssatz
- u : Die Anzahl der Abrechnungen im Nominalzinszeitraum
- i : Die Anzahl der bisherigen Abrechnungen
- r : Die Rate (konstante Tilgung)
- K_i : Die Kapitalschuld nach der i -ten Abrechnung
- Z_i : Der Zins der i -ten Abrechnung
- A_i : Zahlung; Annuität (=Zins+Rate) der i -ten Abrechnung
- S_i : Zinssumme bis einschließlich zur i -ten Abrechnung

und außerdem

$$i, u \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p = \frac{p_N}{u}$$

dann gilt:

1.1.1 Ratentilgung, postnumerando

Die Zahlungen erfolgen nach der Zinsberechnung (banküblich)

$$K_i = K_0 - i r$$

$$Z_i = (K_0 - (i-1) r) p$$

$$A_i = r + (K_0 - (i-1) r) p$$

$$S_i = \left(K_0 i - \frac{1}{2} (i^2 - i) r \right) p$$

1.1.2 Ratentilgung, pränumerando

Die Zahlungen erfolgen vor der Zinsberechnung (theoretisch)

$$K_i = K_0 - i r$$

$$Z_i = (K_0 - i r) p$$

$$A_i = r + (K_0 - i r) p$$

$$S_i = \left(K_0 i - \frac{1}{2} (i^2 + i) r \right) p$$

1.2 Annuitätentilgung

Bei der Annuitätentilgung wird eine Schuld durch regelmäßige, konstante Zahlung, bei vorrangiger Anrechnung der Zahlung auf die Zinsen getilgt.

Es seien:

- p : Der Zinssatz, bezogen auf einen Abrechnungsabschnitt
- p_N : Der Nominalzinssatz
- u : Die Anzahl der Abrechnungen im Nominalzinszeitraum
- i : Die Anzahl der bisherigen Abrechnungen
- r_i : Die Tilgung (=Annuität-Zins)
- K_i : Die Kapitalschuld nach der i -ten Abrechnung
- Z_i : Der Zins der i -ten Abrechnung
- A : Die Annuität (=konstante Zahlung)
- S_i : Zinssumme bis einschließlich zur i -ten Abrechnung

und außerdem

$$i, u \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p = \frac{p_N}{u}, q = p + 1$$

dann gilt:

1.2.1 Annuitätentilgung, postnumerando

Die Zahlungen erfolgen nach der Zinsberechnung (banküblich)

$$K_i = K_0 q^i - A \frac{q^i - 1}{q - 1}$$

$$Z_i = (K_0 p - A) q^{i-1} + A$$

$$r_i = (K_0 p - A) q^{i-1}$$

$$S_i = (K_0 p - A) \frac{q^i - 1}{q - 1} + A i$$

1.2.2 Annuitätentilgung, pränumerando

Die Zahlungen erfolgen vor der Zinsberechnung (theoretisch)

$$K_i = K_0 q^i - A q \frac{q^i - 1}{q - 1}$$

$$Z_i = (K_0 \frac{p}{q} - A) q^i + A$$

$$r_i = (K_0 \frac{p}{q} - A) q^i$$

$$S_i = (K_0 p - A q) \frac{q^i - 1}{q - 1} + A i$$

2 Ertrags- und Kostenfunktion

Im Bereich der Finanz'mathematik' ist es üblich von einer unendlichen Welt auszugehen, in der unbegrenztes Wachstum möglich ist. Diese Betrachtungsweise wird im Folgenden übernommen, wenn auch nicht vertreten! Des Weiteren seien Produktionsmengen als stetig angenommen, was sie ja keineswegs immer sind.

Es seien

x:	Produktionsmenge
E:	Ertrag
K:	Kosten
G:	Gewinn

2.1 Ertrag E

Der Ertrag E einer Produktion wird als proportional zur Produktionsmenge x angenommen, so dass gilt:

I $E = m x$, mit $m = \text{const.}$

2.2 Kosten K

Die Kosten K werden (zumeist) als eine Polynomfunktion 3.Grades der Produktionsmenge x angenommen, gemäß:

II $K = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, darin heißt a_0 : Fixkosten

2.3 Nutzenschwelle und Nutzengrenze

Der Gewinn (=Nutzen) einer Produktion ergibt sich dann als die Differenz aus Ertrag E und Kosten K mit

III $G = E - K$,

so dass die Produktionsmengen x_N für die weder Verlust ($G < 0$) noch Gewinn ($0 < G$) entstehen, als Nullstellen x_N der Differenzfunktion (III) berechenbar sind. Dabei heißt (soweit existent)

die kleinste positive Nullstelle x_{Nu} : Nutzenschwelle und

die nachfolgende Nullstelle x_{No} : Nutzengrenze.

2.4 Stückkosten K_{St}

Die Kosten K_{St} (engl.: *average cost*) für die Produktion eines Stückes (als ob nur diskrete Produktionsmengen möglich wären) ergeben sich aus den Gesamtkosten K geteilt durch die Anzahl x (x ist hier plötzlich diskret – es lebe die Systematik) der produzierten Stücke, demnach:

IV $K_{St} = \frac{K}{x}$, mit $x \neq 0$.

2.5 Differenzialkosten K'

Unter der Annahme einer stetigen Produktion lassen sich die Kostenänderungen dK für beliebig kleine Produktionsmengenänderungen dx als Ableitung der Kostenfunktion K nach der Produktionsmenge x angeben:

V $K' = \frac{dK}{dx}$, also
 $K' = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$

Der Funktionswert dieser Ableitung der Kostenfunktion heißt dann 'Differentialkosten' (engl.: *marginal cost*).

2.6 Betriebsoptimum x_{Opt}

Die Produktionsmenge x_{Opt} , bei der es unerheblich ist, ob die Produktion stetig oder diskret erfolgt, d.h.: die Stückkosten K_{St} und die Differenzialkosten K' gleich sind, heißt 'Betriebsoptimum', es wird zur Optimierung in Monopolen verwendet. Es gilt hierfür die Bedingung:

$$\begin{aligned} \text{VI} \quad & a_3x^2 + a_2x + a_1 + \frac{a_0}{x} = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1, \text{ und somit} \\ & 0 = 2a_3x^2 + a_2x - \frac{a_0}{x} \end{aligned}$$

Dies soll dem Minimum der Stückkosten entsprechen, also gleich mit der Bedingung

$$K'_{\text{St}} = 0$$

sein.

2.7 Nutzenmaximum x_{max}

Wird der Gewinn G , d.h.: die Differenz aus Ertrag E und Kosten K maximal, so heißt die zugehörige Produktionsmenge x_{max} Nutzenmaximum.

Es gilt die notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} \text{VII} \quad & 0 = G', \text{ also} \\ & 0 = -3a_3x^2 - 2a_2x + m - a_1 \end{aligned}$$

und die hinreichende Bedingung (für Maxima):

$$\begin{aligned} \text{VIII} \quad & G'' < 0, \text{ also} \\ & -6a_3x - 2a_2 < 0 \end{aligned}$$

\$

3 Der Kapitalwert und seine Anwendungen

3.1 Verwendete Bezeichnungen

A:	Annuität (regelmäßige konstante Zahlung)
a:	Auszahlung
α :	Gewichtungsfaktor (Anteil des Eigenkapitals)
A_{bst} :	Abschreibungsbetrag
C:	Kapital; Kapitalwert
d:	Saldo (Differenz aus Auszahlung und Einzahlung)
e:	Einzahlung
G:	Gewinn
i:	Zinssatz
K:	Kredit (siehe Kapital C)
n:	Anzahl der Abrechnungen; 'Nutzungsdauer'
q:	Wachstumsfaktor
R:	Restwert
r:	Zinssatz; Interner Zinsfuß; Rendite
s:	Steuersatz
τ :	Anzahl der Abrechnungen (siehe n)
T:	Tilgung
Z:	Zinszahlung

3.2 Berechnungen

Kapitalwert

$$C_0 = C_n \frac{1}{q^n}$$

$$C_0 = A \frac{q^{n-1}}{q-1} \frac{1}{q^n}$$

$$C_{0ges} = \sum C_0$$

Der Kehrwert des Faktors $\frac{q^{n-1}}{q-1} \frac{1}{q^n}$ heißt Kapitalwiedergewinnungsfaktor $\frac{q-1}{q^{n-1}} q^n$

Optimale Nutzungsdauer

$$C_{0ges} \rightarrow \max; \text{ dann } \Rightarrow n := \tau$$

'PayOff' Nutzungsdauer

$$C_{0ges} = 0; \text{ dann } \Rightarrow n := t$$

Interner Zinsfuß

$$C_{0ges} = 0; \text{ dann } \Rightarrow i := r$$

Mischfinanzierung

Der Zinssatz wird als arithmetische Mittel aller Zinssätze angesetzt

$$i = \alpha i_{\text{EigenKapital}} + (1 - \alpha) i_{\text{FremdKapital}}$$

Gewinn nach Steuer

$$G = d - s(d - A_{bst})$$

Zinssatz unter Berücksichtigung des Steuersatzes

$$i_S = (1 - s)i$$

Rendite

$$r = \frac{G}{a_0}$$