

0 Fehlerfortpflanzung

Wird aus gemessenen Größen eine weitere Größe errechnet, so verursachen die Messungenauigkeiten (die *Messfehler*) auch Ungenauigkeiten in der berechneten Größe. Zur Beschreibung dieses Phänomens wird der Begriff *Fehlerfortpflanzung* gebildet.

Beispiel: Soll etwa die Fläche eines rechteckigen Tisches ermittelt werden, so folgt aus der Gleichung der Fläche A eines Rechtecks mit der Länge l und der Breite b : $A=lb$, dass die Messungenauigkeiten aus sowohl der Länge, wie auch der Breite, in die Berechnung der Fläche eingehen (sich also dorthin *fortpflanzen*).

In diesem Zusammenhange ergeben sich zwei Fragen. Zum Einen stellt sich die Frage nach der Ermittlung der *Messungenauigkeiten* in gemessenen Größen. Zum Anderen ist die Frage nach den Auswirkungen der Messungenauigkeiten auf die zu ermittelnde Größe zu beantworten.

Die Messungenauigkeiten, die Fehler der gemessenen Größen, werden auch als *Eingangsfehler* bezeichnet. Ihre Ermittlung wird im ersten folgenden Abschnitt betrachtet.

Die Ungenauigkeit, der Fehler der berechneten Größe, ergibt sich aus funktionstheoretischen Überlegungen über die Eingangsfehler. Dieser Fehler wird in den nachfolgenden Kapiteln 2 und 3 auf unterschiedliche Arten betrachtet. Dabei wird bewusst eine gleichartige (teilweise kopierte) Darstellung gewählt, so dass auch nur eines, der Kapitel betrachtet werden kann.

Im Kapitel 2 wird der *maximale absolute Fehler* betrachtet. Die beschriebene Vorgehensweise ist besonders für 'schnelle' Betrachtungen, etwa für Laborübungen verschiedenster Studiengänge sinnvoll.

Die, im Kapitel 3 beschriebene Vorgehensweise, zur Ermittlung des *GAUSS-Fehlers* ist besonders für weitere, statistische Auswertungen geeignet. Die Wahrscheinlichkeiten bestimmter Messdaten werden angebbar. Hier lassen sich dann auch die Methoden der Qualitätskontrolle und Produktionssicherung anschließen.

Dieser Text – von 1996 – wurde zuletzt 2023 überarbeitet, er darf frei verwendet werden, sofern er nicht modifiziert wird und die Quelle angegeben wird.

1 Eingangsfehler

Werden beliebige Größen gemessen, so enthalten die gemessenen Daten Ungenauigkeiten, die als *Messfehler* bezeichnet werden. Diese Messfehler entstehen durch vielerlei Einflüsse, von schlechten Versuchsaufbauten bis zu natürlichen Variationen.

Auf die 'natürlichen Variationen' ist eine besondere Aufmerksamkeit zu richten. Alle gemessenen Daten streuen um ihren Mittelwert nach einer statistischen Dichtefunktion. Eine derartige Datenstreuung ist folglich ein Charakteristikum korrekt erhobener Daten. Fälschlich erhobene oder manipulierte Daten folgen nicht einer solchen Dichtefunktion! Ein statistischer Test auf zufällige Datenverteilung ist also ein sinnvoller Beginn einer Datenauswertung.¹

Insbesondere (aber nicht ausschließlich) entstehen die Messfehler aus

- Ungenauigkeiten in Folge der Anzeige- und Ablesegenauigkeit in Messgeräten
- Nicht berücksichtigten Variablen
- Natürlichen Schwankungen der Eigenschaften von Objekten (Zufall als quantenmechanisches Prinzip, vgl. auch *Zentraler Grenzwertsatz*)

Die Messfehler können sowohl als *absolute Fehler*, wie auch als *relative Fehler* angegeben werden.

Absolute Fehler sind Fehler, die über die Abweichungen erhobener Messdaten vom Mittelwert dieser Daten beschrieben werden. Dabei werden diese Messwertabweichungen ohne Berücksichtigung ihrer Vorzeichen – also *absolut* – angegeben.

Beispiel: Ein Maßband zur Längenmessung sei mit Markierungen in Abständen von 1mm versehen. Die Ablesegenauigkeit ist daher auf etwa 0,5mm begrenzt. Es werden Messdaten auf ganzzahlige Angaben in [mm] gerundet. Das Vorzeichen des Messfehlers lässt sich nicht angeben. Der absolute Fehler ist also

$$\Delta l = 0,5\text{mm}.$$

¹vgl. GUSTAV GRÖNNÄS: 'Statistik und Wahrscheinlichkeit – leicht gemacht', 2. erw. Auflage, tredition, Ahrensburg, 2024

Relative Fehler sind Fehler, die über das Verhältnis aus dem absoluten Fehler und dem Messmittelwert – also relativ – beschrieben werden. Diese Fehlerangabe erfolgt häufig in [%].

Beispiel: Ein Spannungsmesser trage die Genauigkeitsangabe '1% vom Maximalwert'. In einem Spannungsmessbereich bis 1000V ergibt sich damit ein Messfehler von

$$\Delta U = 1\% \cdot 1000V$$

$$\Delta U = 10V.$$

1.1 Ermittlung der Eingangsfehler

Die Eingangsfehler einer Messung lassen sich häufig aus den bekannten Genauigkeiten der verwendeten Messgeräte abschätzen. Eine solche Abschätzung ist allerdings nicht notwendigerweise hinreichend sicher, also möglicherweise zu grob oder auch zu optimistisch.

Ist daher eine Eingrenzung der Eingangsfehler erforderlich, so sind die Methoden der Statistik anzuwenden. Zunächst wird die Frage geklärt, ob eine bestimmte Genauigkeit erforderlich ist, oder ob die Genauigkeit nur ermittelt werden soll...

In studentischen 'Laborübungen' werden im Allgemeinen nur wenige Messungen durchgeführt. Hier kann nur die Frage nach der erreichten Genauigkeit gestellt (und beantwortet) werden.

Ist hingegen eine bestimmte Messgenauigkeit gefordert, so muss zunächst die Anzahl erforderlicher Messungen errechnet werden. Nach Durchführung der Messungen wird dann die tatsächlich erreichte Genauigkeit ermittelt.

1.2 Ermittlung der erforderlichen Anzahl Messungen

Da niemals alle Einflüsse auf gemessene Größen eingegrenzt werden können, muss eine geringe Unwägbarkeit, eine Unsicherheit der Aussage, als Bestandteil der Untersuchung akzeptiert werden. Hierfür wird im Allgemeinen eine Aussagesicherheit von 95% (das Signifikanzniveau) gewählt, so dass die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums 5% ist. In seltenen Fällen wird auch eine größere Aussagesicherheit (etwa 99%) gewählt.

Für die 95%-ige Aussagesicherheit ergibt sich aus statistischen Überlegungen für einen relativen Messfehler Δp die Anzahl erforderlicher Messungen n ungefähr zu²

$$n \approx \frac{1}{\Delta p^2}.$$

Anmerkung: Ist vorab bereits ein ungefähres Messergebnis abschätzbar, kann die Anzahl der Messungen um etwa den Faktor 10 verkleinert werden.

Beispiel: Die 'Schichtdicke' eines Halbleiterkristalls solle auf 1% genau gemessen werden. Es ergibt sich die Anzahl der Messungen zu

$$n \approx \frac{1}{0,01^2}$$

$$n \approx 10000.$$

1.3 Ermittlung der erreichten Genauigkeit

Liegen aus einer Untersuchung Messdaten vor, können diese Daten einer Analyse unterzogen werden und zumindest der (arithmetische) Mittelwert $\bar{x}$ und die Standardabweichung x_s errechnet werden. Die Messdaten streuen dann so um den Mittelwert, dass etwa 95% aller Daten (vgl. *Signifikanzniveau*) innerhalb des Intervalls liegen, das um den Mittelwert um die 2-fache Standardabweichung nach unten und nach oben begrenzt wird.³ Für dieses Signifikanzniveau ergibt sich damit die relative Messgenauigkeit zu

$$\Delta p = 2 \frac{x_s}{\bar{x}}.$$

Die Messdaten streuen also um den Mittelwert gemäß

$$x_{\text{mess}} = \bar{x} \pm 2 x_s.$$

Alternativ zu diesem Vorgehen kann einfach das Intervall vom minimalen zum maximalen Messwert angegeben werden:

$$x \in [x_{\min}; x_{\max}].$$

Dieses erlaubt eine ungefähre Abschätzung der Messgenauigkeit, allerdings mit einer unbekannten (und möglicherweise sehr geringen) Aussagesicherheit.

²Vgl. GUSTAV GRÖNNÄS: 'Statistik und Wahrscheinlichkeit – leicht gemacht', 2. erw. Auflage, tredition, Ahrensburg, 2024

³Die genaue Zahl ist $z = 1,959$

Beispiel: Die 'Schichtdicke' eines Halbleiterkristalls wurde gemessen mit $x \in \{1,02; 1,08; 0,98\}$. Es ergeben sich

der Mittelwert $\bar{x} = 1,027$

und die Standardabweichung $s_x = 0,03559$

Das Intervall 'vertrauenswürdiger' Messdaten ergibt sich hiermit zu

$x \in [0,9558; 1,098]$ und daher auf

$$\Delta p = 2 \frac{0,03559}{1,027}$$

$\Delta p = 6,9\%$ genau.

Das Minimum-Maximum-Intervall

$x \in [0,98; 1,08]$

täuscht hier eine Genauigkeit von

$\Delta p = 4,9\%$ vor.

2 Fehler erster Ordnung

2.0 Vorbetrachtung

Aus der Definition der Steigung m einer Geraden $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = mx + b$, mit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m \text{ folgt nach Multiplikation mit } \Delta x$$

$$\Delta y = m \Delta x.$$

Ein analoges Vorgehen für eine beliebige differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = f(x)$ liefert dann für 'kleine' Änderungen des Argumentes Δx die zugehörige Änderung des Funktionswertes Δy :

$$\Delta y \approx y' \Delta x,$$

bzw. für eine Funktion in mehreren Variablen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ (vgl. TAYLORpolynome):

$$\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

Das heißt: Die Änderung des Funktionswertes Δy lässt sich für eine bestimmte kleine Änderung Δx des Argumentes näherungsweise leicht angeben.

Können nun in praktischen Anwendungen Argumente nur mit einer bestimmten Genauigkeit angegeben werden, so ist es möglich, den daraus entstehenden Fehler in der Berechnung des Funktionswertes zu ermitteln. Da der Argumentfehler jedoch nur ohne Kenntnis seines Vorzeichens eingegrenzt werden kann, muss auch für die Ermittlung des Funktionswertefehlers auf die Vorzeichenangabe verzichtet werden. Also:

$$\Delta y \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right|,$$

oder kurz:

$$\Delta y \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|.$$

Da hier nur die erste Ableitung der Funktion betrachtet wird, heißt der hier betrachtete Fehler auch 'Fehler erster Ordnung'.

Aus den obigen Kurzbetrachtungen ergibt sich das folgende praktische Vorgehen zur Ermittlung des maximalen absoluten Fehlers:

2.1 Ermittlung des Funktionswertes

An der Stelle, an der der Fehler ermittelt werden soll, wird zunächst der Funktionswert ermittelt.

Beispiel: Die Fläche A eines Rechtecks der Länge $l = 1,5m \pm 0,1m$ und der Breite $b = 1,4m \pm 0,05m$ solle einschließlich ihres Fehlers ermittelt werden.

Für die Fläche A gilt:

$A = lb$, somit ist

$$A = 1,5m \cdot 1,4m$$

$$A = 2,1m^2.$$

2.2 Bildung aller partiellen Ableitungen der Funktion

Die Funktion f wird nach allen Variablen x_i abgeleitet (das heißt: Die JACOBI-Matrix wird gebildet).

Beispiel: Da die Fläche A eine Funktion $A = f(l; b)$ der Variablen l und b ist, wird f nach l und nach b abgeleitet:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = b \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial b} = l.$$

Als JACOBI-Matrix geschrieben ergibt sich daher:

$$A' = \begin{pmatrix} b; & l \end{pmatrix}$$

2.3 Berechnung des maximalen absoluten Fehlers

Nach Abschnitt 2.0 ergibt sich der Fehler Δy für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; y = f(x_1; \dots; x_n)$ zu

$$\Delta y \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right|,$$

Beispiel: Der maximale absolute Fehler wird berechnet:

$$\Delta A \leq \left| \frac{\partial f}{\partial l} \Delta l \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b \right|$$

$$\Delta A \leq |b \Delta l| + |l \Delta b|$$

$$\Delta A \leq |1,4m \cdot 0,1m| + |1,5m \cdot 0,05m|$$

$$\Delta A \leq 0,215m^2$$

2.4 Berechnung des relativen Fehlers

Im Allgemeinen ist nicht der Absolutbetrag des Fehlers von Bedeutung, sondern der Fehler bezogen auf den Funktionswert. Es wird also der Absolutbetrag des Quotienten des Fehlers durch den Funktionswert – der relative Fehler r – gebildet:

$$r = \left| \frac{\Delta y}{y} \right|.$$

Beispiel: Die Fläche wurde ermittelt zu

$$A = 2,1m^2$$

mit einem maximalen absoluten Fehler

$$\Delta A \leq 0,215m^2.$$

Damit ergibt sich der relative Fehler:

$$r = \left| \frac{\Delta A}{A} \right|$$

$$r = \left| \frac{0,215m^2}{2,1m^2} \right|$$

$$r = 0,1024$$

$$r = 10,24\%$$

Zusammengefasst ergibt sich die Fläche A des Rechtecks mit

$$A = 2,1m^2 \pm 0,215m^2$$

auf $r = 10,24\%$ genau.

\$

3 GAUSS-Fehler

3.0 Vorbetrachtung

Aus der Definition der Steigung m einer Geraden $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = mx + b$, mit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m \text{ folgt nach Multiplikation mit } \Delta x$$

$$\Delta y = m \Delta x.$$

Ein analoges Vorgehen für eine beliebige differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = f(x)$ liefert dann für 'kleine' Änderungen des Argumentes Δx die zugehörige Änderung des Funktionswertes:

$$\Delta y \approx y' \Delta x,$$

bzw. für eine Funktion in mehreren Variablen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$:

$$\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

Das heißt: Die Änderung des Funktionswertes Δy lässt sich für eine bestimmte kleine Änderung Δx des Argumentes näherungsweise leicht angeben (vgl. TAYLORpolynome).

Können nun in praktischen Anwendungen Argumente nur mit einer bestimmten Genauigkeit angegeben werden, so ist es möglich, den daraus entstehenden Fehler in der Berechnung des Funktionswertes zu ermitteln. Da der Argumentfehler jedoch nur ohne Kenntnis seines Vorzeichens eingegrenzt werden kann, muss auch für die Ermittlung des Funktionswertefehlers auf die Vorzeichenangabe verzichtet werden.

C. F. GAUSS liefert eine Lösung dieser Problemstellung:

Wie in der Ermittlung der Standardabweichung, lassen sich Vorzeichen mittels eines Quadrierens entfernen. Im Gegensatz zum Absolutbetrag⁴ $abs(\)$ gibt es für Potenzen Gegenoperationen, so dass ein Potenzieren mit 2 über die Gegenoperation der 2-ten Wurzel umgekehrt werden kann...

Über eine Addition der Quadrate der Fehler einzelner Größen und ein anschließendes Radizieren, wird zudem ein geometrisches Abstandsmaß verwendet (vgl. EUKLIDISCHE Norm), das auch schon zur Definition der

⁴vgl. GUSTAV GRÖNNÄS: 'Schnellkurs Gleichungslösen', 2. Auflage, tredition, Ahrensburg, 2024

Standardabweichung verwendet wurde und so der statistischen Methodik folgt.

Der resultierende Fehler aus mehreren Messgrößen mit Einzelfehlern ergibt sich also als *mittlerer quadratischer Fehler*, oder *GAUSSscher Fehler* zu:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2\right)},$$

kurz mittels Summenzeichen geschrieben:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2}.$$

Aus den obigen Kurzbetrachtungen ergibt sich das folgende praktische Vorgehen zur Ermittlung des mittleren quadratischen Fehlers:

3.1 Ermittlung des Funktionswertes

An der Stelle, an der der Fehler ermittelt werden soll, wird zunächst der Funktionswert ermittelt.

Beispiel: Die Fläche A eines Rechtecks der Länge $l = 1,5m \pm 0,1m$ und der Breite $b = 1,4m \pm 0,05m$ solle einschließlich ihres Fehlers ermittelt werden.

Für die Fläche A gilt:

$$A = lb, \text{ somit}$$

$$A = 1,5m \cdot 1,4m$$

$$A = 2,1m^2.$$

3.2 Bildung aller partiellen Ableitungen der Funktion

Die Funktion f wird nach allen Variablen x_i abgeleitet (das heißt: Die JACOBI-Matrix wird gebildet).

Beispiel: Da die Fläche A eine Funktion $A = f(l; b)$ der Variablen l und b ist, wird f nach l und nach b abgeleitet:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = b \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial b} = l.$$

Als JACOBI-Matrix geschrieben ergibt sich daher:

$$A' = \begin{pmatrix} b; & I \end{pmatrix}$$

3.3 Berechnung des Gauss-Fehlers

Nach Abschnitt 3.0 ergibt sich der quadratische Fehler Δy für Funktionen in mehreren Variablen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; y = f(x_1; \dots; x_n)$ zu

$$\Delta y = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2\right)},$$

Beispiel: Der quadratische Fehler wird berechnet:

$$\Delta A = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \Delta b\right)^2\right)}$$

$$\Delta A = \sqrt{(b \Delta l)^2 + (l \Delta b)^2}$$

$$\Delta A = \sqrt{((1,4m \ 0,1m)^2 + (1,5m \ 0,05m)^2)}$$

$$\Delta A = 0,1588m^2.$$

3.4 Berechnung des relativen Fehlers

Im Allgemeinen ist nicht der mittlere quadratische Fehler von Bedeutung, sondern der Fehler bezogen auf den Funktionswert. Es wird also der Absolutbetrag des Quotienten des Fehlers durch den Funktionswert – der relative Fehler r – gebildet:

$$r = \left| \frac{\Delta y}{y} \right|.$$

Beispiel: Die Fläche wurde ermittelt zu

$$A = 2,1m^2$$

mit einem mittleren quadratischen Fehler

$$\Delta A = 0,1588m^2.$$

Damit ergibt sich der relative Fehler:

$$r = \left| \frac{\Delta A}{A} \right|$$

$$r = \left| \frac{0,1588m^2}{2,1m^2} \right|$$

$$r = 0,0756$$

$$r = 7,56\%$$

Zusammengefasst ergibt sich die Fläche A des Rechtecks mit

$$A = 2,1m^2 \pm 0,1588m^2$$

auf $r = 7,56\%$ genau.

\$

© Quelle, Urheberrecht und Copyright:

GUSTAV GRÖNNÄS

Script zur Fehlerrechnung

<https://www.gustav-gronnas.de/books/books.html>

Dieser Text – von 1996 – wurde zuletzt 2023 überarbeitet, er darf frei verwendet werden, sofern er nicht modifiziert wird und die Quelle angegeben wird.