11 Grafische Lösung eines linearen Optimierungsproblems[1]

Die grafische Lösung beliebiger Probleme ist zeitaufwendig und ungenau, auch ergeben sich Beschränkungen in der Lösbarkeit solcher Probleme in Folge der Zweidimensionalität einer Grafik. Ebenfalls lassen sich lineare Optimierungsprobleme nur im Falle der Existenz zweier Variablen grafisch lösen. Mit den heutigen Mitteln eines Computereinsatzes sind die Grenzen der Berechenbarkeit erheblich weiter gesteckt...

Auch sind Optimierungsprobleme in der Realität nicht auf zwei Variable beschränkt! Eine grafische Lösung ist daher praktisch bedeutungslos, sie mag im Einzelfall, aus didaktischen Gründen, etwa zur Erläuterung der Aufgabenstellung, vorteilhaft sein. Das Beherrschen dieser Lösungsmethodik ist jedoch nutzlos und kann, falls in Klausuren gefordert, nur als Anachronismus angesehen werden!

Das Niveau einer Ausbildung lässt sich hier klar und einfach an den Klausur- oder Prüfungsanforderungen erkennen.

In medias res:

11.1 Aufgabenstellung

Es sei ein lineares Optimierungsproblem in 2 Variablen grafisch zu lösen.

In Ausnahmefällen lassen sich auch lineare Optimierungsprobleme in 3 Variablen grafisch lösen. Voraussetzung hierfür ist das Vorliegen einer Einschränkung in Gleichungsform. Diese Gleichung kann dann nach einer Variablen (bevorzugt die dritte Variable) umgestellt und in alle Einschränkungen sowie die Zielfunktion eingesetzt werden...

[1] Als Ergänzung zum Buch HELGE NORDMANN, Lineare Optimierung - ein Rezeptbuch, 2. Auflage, Bremerhaven, 2002, ISBN 3-8311-4446-X

B 11.1 Beispielaufgabe

Als Optimierungsproblem wird die im Buch durchgehend behandelte Aufgabe 1 (Maximumproblem B 2.2.1, Seite 11ff) gewählt.

Es seien also

x_1: Die Anzahl der produzierten Geräte des Typs 1

x_2: Die Anzahl der produzierten Geräte des Typs 2

z: Der Gewinn

Das Optimierungsproblem ergab sich mit den Einschränkungen und der Zielfunktion zu

I	$4\,x_1 + 0\,x_2 \leq 20$	(Arbeitszeit Gerät Typ 1)
II	$0\,x_1 + 2\,x_2 \leq 8$	(Arbeitszeit Gerät Typ 2)
III	$2\,x_1 + 2\,x_2 \leq 18$	(Rohstoffbeschränkung)
R	$0{,}5\,x_1 + 1\,x_2 = z$	(Gewinn)
	$z \to \max$	

11.2 Vorbetrachtung: Die Achsenabschnittsform von Hyperebenen

Alle Einschränkungen und die Zielfunktion linearer Optimierungsprobleme sind Hyperebenen,[2] sie lassen sich stets in der - im Folgenden kurz erläuterten - Achsenabschnittsform darstellen.

Die Achsenabschnittsform einer Hyperebene ist von der Form

$$\frac{1}{a_1}x_1 + \frac{1}{a_2}x_2 + \ldots + \frac{1}{a_n}x_n = 1\,.$$

Für eine Gerade - und nur die ist hier zu betrachten - gilt daher

$$\frac{1}{a_1}x_1 + \frac{1}{a_2}x_2 = 1\,.$$

Das Absolutglied ist stets 1.

Die Besonderheit dieser Gleichungsform ist nun die direkte Ablesbarkeit der Schnitte dieser Funktion mit den Koordinatenachsen: Die

[2]Eine Hyperebene ist eine lineare Vektorfunktion, deren Dimension um 1 kleiner ist als die Dimension des Raumes, in dem sie sich befindet. So sind etwa (1-dimensionale) Geraden in der anschaulichen Ebene (dem 2-dimensionalen Raum) Hyperebenen.

Koeffizienten der Variablen geben - in ihren Kehrwerten - die Schnitt-koordinaten mit den Achsen direkt an.

Für die Gerade

$$\frac{1}{a_1}x_1 + \frac{1}{a_2}x_2 = 1$$

ist der Schnitt mit der

1-ten Achse: $x_1 = a_1$

2-ten Achse: $x_2 = a_2$

Zur Ermittlung der Achsenschnitte muss nur die Achsenabschnitts-form gebildet werden (mittels der Division der jeweiligen Gleichung durch ihr Absolutglied) und der Kehrwert der Koeffizienten abgelesen werden...

B 11.2 Beispiel zur Ermittlung der Achsenschnitte

Es sei die Einschränkung III des Beispiels B 2.2.1 gegeben

III $\quad 2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 18,$

mittels Division durch das Absolutglied dieser Gleichung ergibt sich ihre Achsenabschnittsform

III $\quad \frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 \leq 1$

Damit lassen sich die Achsenschnitte direkt ablesen:

Schnitt mit der 1-ten Achse in $x_1=9$,

Schnitt mit der 2-ten Achse in $x_2=9$.

11.3 Ermittlung der Achsenschnitte aller Einschränkungen

Das Un-Gleichungssystem wird in allen Einschränkungen auf die Achsenabschnittsform gebracht. Dazu werden alle Gleichungen durch ihre Absolutglieder dividiert.

B 11.3 Fortführung des Beispiels B 2.2.1

Die Einschränkungen des Un-Gleichungssystems werden durch ihre Absolutglieder dividiert. Aus dem System

I	$4 \; x_1 + 0 \; x_2 \leq 20$
II	$0 \; x_1 + 2 \; x_2 \leq 8$
III	$2 \; x_1 + 2 \; x_2 \leq 18$
R	$0{,}5 \; x_1 + 1 \; x_2 = z$

wird mittels der Divisionen[3]

I	$\frac{1}{5} x_1 + \frac{0}{1} x_2 \leq 1$
II	$\frac{0}{1} x_1 + \frac{1}{4} x_2 \leq 1$
III	$\frac{1}{9} x_1 + \frac{1}{9} x_2 \leq 1$
R	$\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{1} x_2 = z$

Es werden alle Achsenschnitte abgelesen.

Für die Einschränkung I ergeben sich

- Schnitt mit der 1-ten Achse: $x_1=5$
- Schnitt mit der 2-ten Achse: leer[4]

Für die Einschränkung II ergeben sich

- Schnitt mit der 1-ten Achse: leer
- Schnitt mit der 2-ten Achse: $x_2=4$

Für die Einschränkung III ergeben sich

- Schnitt mit der 1-ten Achse: $x_1=9$
- Schnitt mit der 2-ten Achse: $x_2=9$

11.4 Erstellung des Koordinatensystems

Zur Erstellung eines (2-dimensionalen) Koordinatensystems müssen geeignete Achsenteilungen gewählt werden. Daher werden zunächst

[3]Die Zielfunktion wird an dieser Stelle nur aus optischen Gründen anders dargestellt, sie wird später betrachtet

[4]Aus der Unmöglichkeit der Division durch 0 folgt die Nichtexistenz des jeweiligen Achsenschnittes, die Lösung ist leer.

die größten Achsenschnitte einer jeden Achse aus der Menge der Achsenschnitte ausgewählt.

Gibt es auch negative Achsenschnitte, so müssen zusätzlich die kleinsten Achsenschnitte notiert werden.

Es wird sodann ein Koordinatensystem gezeichnet und die Achsen so unterteilt, dass die maximalen Achsenschnitte nahe an den äußeren Achsenenden liegen.

Gibt es auch negative Achsenschnitte sind die kleinsten Achsenschnitte nahe an den unteren Achsenenden zu positionieren. Andernfalls ist der Ursprung des Koordinatensystems am unteren linken Rand der Grafik anzuordnen.

Es empfiehlt sich, kariertes Papier zu verwenden und die Zeichnung mit einem Grafit-Stift in etwa der halben Höhe und halben Breite eines DIN A4 Blattes auszuführen.

B 11.4 Fortführung des Beispiels B 2.2.1

Im Beispiel B 2.2.1 liegt der größte Schnitt mit der ersten Achse in x_1=9, es wird daher das Achsenende in x_{A1}=10 gewählt, so dass sich eine leichte Unterteilbarkeit der Achse ergibt.

Entsprechend liegt der größte Achsenschnitt mit der zweiten Achse in x_2=9, daher wird für die zweite Achse ebenfalls das Ende in x_{A2}=10 gewählt.[5]

[5]Die Achsen sind nur in diesem Beispiel gleichartig unterteilt, eine unterschiedliche Achsenteilung ist jedoch nicht ungewöhnlich.

Da es hier keine negativen Achsenschnitte gibt, beginnt die Grafik im Ursprung des Systems:

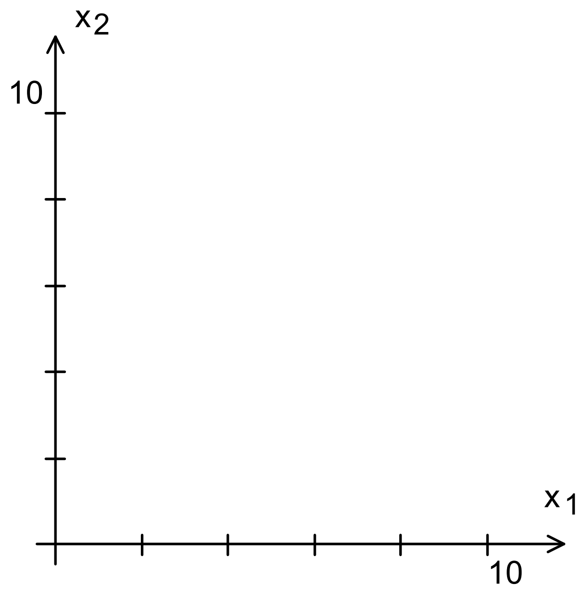

Abb. 11.4 - Das Koordinatensystem

11.5 Eintragung aller Einschränkungen

Für jede Einschränkung werden zunächst die Achsenschnitte eingetragen und dann (mit Hilfe eines Lineals) die Schnitte mit einer Geraden verbunden. Im Falle der Nichtexistenz eines Achsenschnittes wird die jeweilige Gerade senkrecht zur Achse, mit der ein Schnitt existiert, eingetragen.

Da es sich bei den Einschränkungen um Un-Gleichungen handelt, müssen jeweils entweder die verbotenen oder die erlaubten Bereiche markiert werden. Es empfiehlt sich, die verbotenen Bereiche, bevorzugt mittels einer Schraffur (etwa: Roter Buntstift), senkrecht zur Geraden, als unerlaubt zu kennzeichnen.[6]

Enthält die Un-Gleichung das Un-Gleichheitszeichen in der Form $\leq$ (kleiner oder gleich), so sind die Bereiche rechts, oberhalb der Geraden verboten.

[6]Aus drucktechnischen Gründen finden sich in der Literatur zumeist die erlaubten Bereiche markiert. Dieses ist aber weniger übersichtlich!

B 11.5 Fortführung des Beispiels B 2.2.1

Die Einschränkung I des Beispiels B 2.2.1 weist einen Schnitt mit der ersten Achse in x_1=5 und einen leeren Schnitt mit der zweiten Achse auf. Die Gerade verläuft also senkrecht zur ersten Achse:

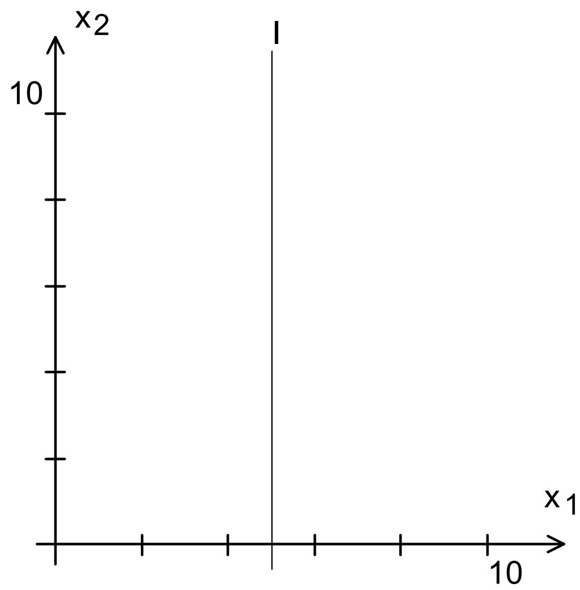

Abb. 11.5.a - Eintragung der ersten einschränkenden Geraden

Der verbotene Bereich wird markiert:

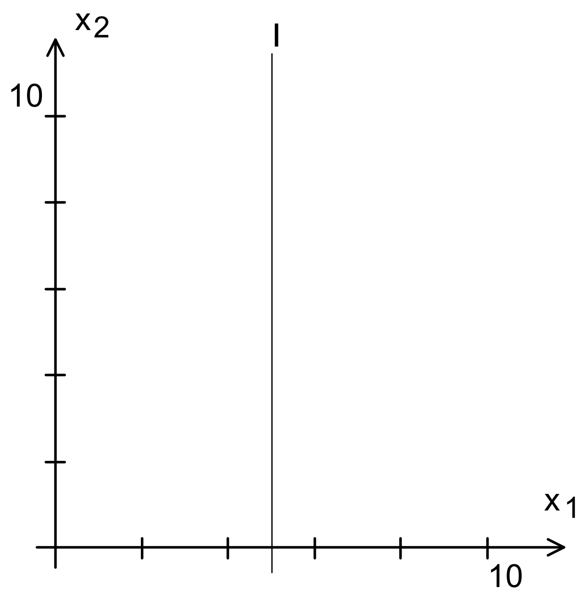

Abb. 11.5.b - Eintragung der ersten Einschränkung

Entsprechend wird die zweite Einschränkung eingetragen:

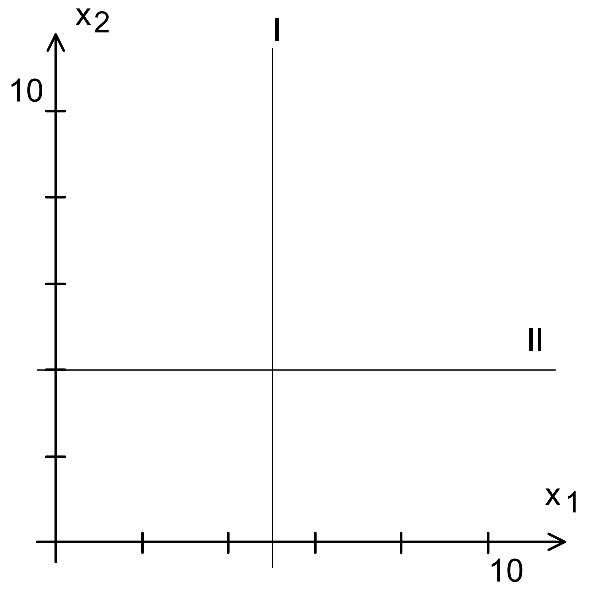

Abb. 11.5.c - Eintragung der zweiten Einschränkung

Die dritte Einschränkung weist Schnitte mit allen Achsen auf, sie wird ebenfalls eingetragen:

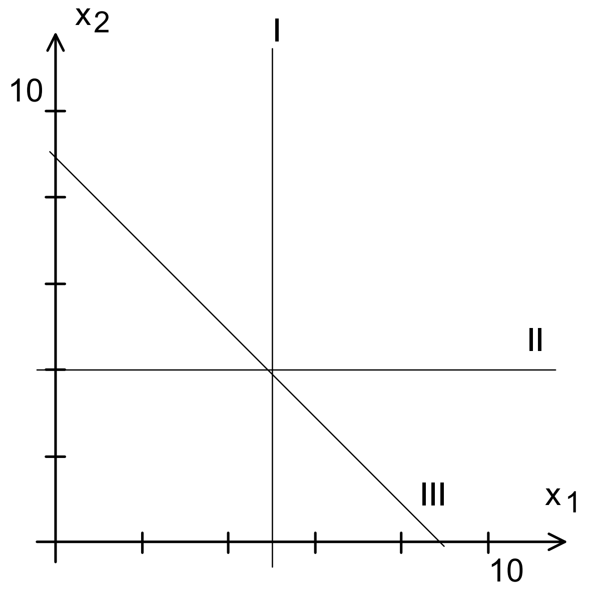

Abb. 11.5.d - Eintragung der dritten Einschränkung

11.6 Eintragung der Zielfunktion

Die Eintragung der Zielfunktion gestaltet sich etwas schwieriger als die Eintragung der Einschränkungen, da kein Zielfunktionswert (das Absolutglied) der Zielfunktion bekannt ist. Es muss also zunächst ein Zielfunktionswert geeignet gewählt werden.

Zur Wahl eines geeigneten Zielfunktionswertes als Absolutglied wird für jede Achse das Teilungsende abgelesen und mit dem, dieser Achse zugehörigen Koeffizienten multipliziert. Das Minimum dieser Berechnungen wird als Zielfunktionswert gewählt.

Also seien: x_{Ai}: das Ende der i-ten Achse

und c_i: der i-te Koeffizient der Zielfunktion,

dann ergeben sich die Zielfunktionsanwärter z_i zu

$$z_i = x_{Ai} c_i .$$

Als Zielfunktionswert wird z_* zu

$$z_* = \min\{z_i\}\, für \forall i$$

gewählt.

Anschließend wird die Zielfunktion in ihre Achsenabschnittsform überführt und als Gerade in das Koordinatensystem eingetragen.

B 11.6 Fortführung des Beispiels zur Eintragung der Zielfunktion

Es sei das Beispiel B 2.2.1 fortgeführt.

Die erste Achse endet in x_{a1}=10, der erste Zielfunktionskoeffizient ist c_1=0,5, daher ergibt sich ein möglicher, geeigneter Zielfunktionswert zu

$$z_1 = 10 \cdot 0,5$$
$$z_1 = 5 .$$

Die zweite Achse endet in x_{a2}=10, der zweite Zielfunktionskoeffizient ist c_2=1,0, daher ergibt sich ein möglicher, geeigneter Zielfunktionswert zu

$$z_2 = 10 \cdot 1{,}0$$

$$z_2 = 10\,.$$

Das Minimum der möglichen, geeigneten Zielfunktionswerte ist

$$z_* = \min\{5\,,\,10\}$$

$$z_* = 5\,,$$

so dass der Zielfunktionswert zu z_*=5 gewählt wird:

R_* $\quad \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{1}x_2 = 5\,.$

Eine Division durch das 'Absolutglied' der Zielfunktion liefert wieder eine Achsenabschnittsform:

R_* $\quad \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{5}x_2 = 1\,.$

Die Achsenschnitte dieser Funktion sind damit ablesbar -- es kann die Zielfunktion in das Koordinatensystem eingetragen werden:

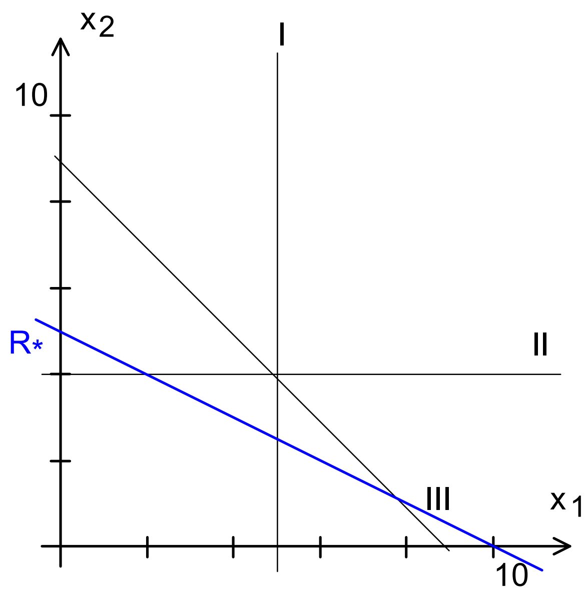

Abb. 11.6 - Eintragung der Zielfunktion

11.7 Ermittlung des Optimums

Zur Ermittlung des Optimums kann nun die Zielfunktion (mit frei gewähltem Funktionswert) parallel an die Grenzen des zulässigen Bereiches verschoben werden.

- Im Falle der Maximum-Optimierung wird die Zielfunktionsgerade nach oben, rechts verschoben
- Im Falle der Minimum-Optimierung wird die Zielfunktionsgerade nach unten, links verschoben

Anschließend müssen nur noch die Koordinaten der Grenzecke des zulässigen Bereiches abgelesen werden (und durch Einsetzen dieser Koordinaten in die originale Zielfunktionsgleichung R der optimale Zielfunktionswert errechnet werden).

B 11.7 Fortführung des Beispiels B 2.2.1

Die Zielfunktionsgerade R_* wird nach oben, rechts an die Grenzen des zulässigen Bereiches verschoben:

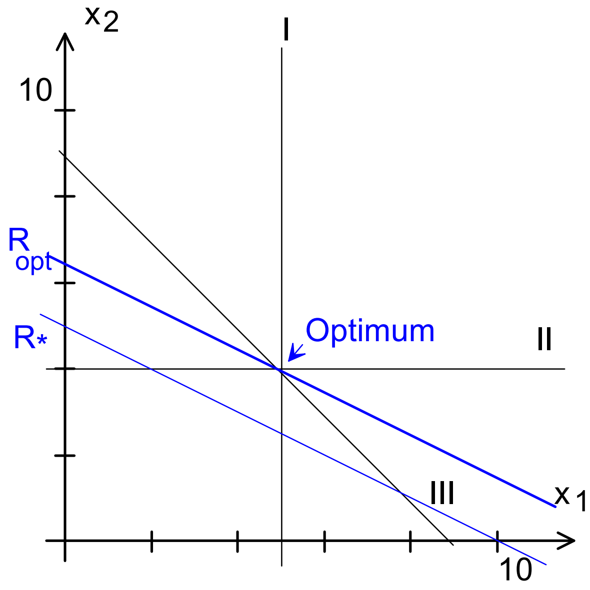

Abb. 11.7 - Verschiebung der Zielfunktion ins Optimum

Die Koordinaten des Optimums werden abgelesen:

$x_{Opt1}=5$

$x_{Opt2}=4$.

Mittels Einsetzen dieser Koordinaten in die originale Zielfunktion R ergibt sich (in Übereinstimmung mit den rechnerischen Ergebnissen des Buches) der optimale Zielfunktionswert zu:

R_{Opt} $\quad \frac{1}{2}(5)+\frac{1}{1}(4)=z_{Opt}$

$z_{Opt}=6,5$.

$